

Г. ХАРДИ

РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

Перевод с английского

Д. А. РАЙКОВА

С предисловием и обзорной статьей

С. Б. СТЕЧКИНА

1951

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва

АННОТАЦИЯ

Настоящая книга представляет собой монографию, посвященную суммированию расходящихся рядов. Она содержит обширный исторический обзор вопроса, краткое введение в общую теорию суммирования рядов и подробное исследование ряда конкретных методов суммирования (методов Чезаро, Абеля, Вороного, Эйлера и др.).

Кроме того, здесь рассматриваются приложения теории к задаче перемножения рядов, к исследованию формулы суммирования Эйлера-Маклорена, к аналитическому продолжению функций, к суммированию рядов Фурье и к нахождению значений определенных интегралов.

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов — и требует для своего чтения знания теории функций действительного и комплексного переменного. В некоторых своих разделах она может быть также полезна для тех инженеров, которые встречаются с расходящимися рядами.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие редактора	9
Замечание об обозначениях	9
Глава I. Введение	13
1.1. Сумма ряда	13
1.2. Некоторые вычисления с расходящимися рядами	14
1.3. Первоначальные определения	18
1.4. Регулярность метода	24
1.5. Расходящиеся интегралы и обобщенные пределы функций непрерывного переменного	24
1.6. Некоторые исторические замечания	27
1.7. Замечания о британских аналитиках первой половины девят- надцатого века	33
Примечания к главе I	36
Глава II. Несколько исторических примеров	39
2.1. Введение	39
А. Эйлер и функциональное уравнение дзета-функции Римана	
2.2. Функциональное уравнение для $\zeta(s)$, $\eta(s)$ и $L(s)$	39
2.3. Эйлерова проверка	40
Б. Эйлер и ряд $1 - 1x + 2!x^2 - \dots$	
2.4. Суммирование ряда $1 - 1x + 2!x^2 - \dots$	43
2.5. Асимптотическое поведение ряда	45
2.6. Численные расчеты	46
В. Фурье и его теорема	
2.7. Теорема Фурье	47
2.8. Первая формула Фурье	48
2.9. Другие формы коэффициентов и рядов	51
2.10. Законность формул Фурье	52
Г. Показательный ряд Хэвисайда	
2.11. Хэвисайд о расходящихся рядах	54
2.12. Обобщенный показательный ряд	55
2.13. Ряд $\sum \varphi^{(r)}(x)$	56
2.14. Обобщенный биномиальный ряд	57
Примечания к главе II	58
Глава III. Общие теоремы	61
3.1. Линейные преобразования	61
3.2. Регулярные преобразования	62
3.3. Доказательство теорем 1 и 2	63
3.4. Доказательство теоремы 3	66
3.5. Варианты и аналоги	69
3.6. Положительные преобразования	74
3.7. Теорема Кноппа	76
3.8. Одно применение теоремы 2	79
3.9. Разбавление рядов	82
Примечания к главе III	84
Глава IV. Частные методы суммирования	88
4.1. Методы Вороного	88
4.2. Регулярность и совместность методов Вороного	89
4.3. Включение	91
4.4. Равносильность	92
4.5. Еще одна теорема о включении	93

4.6. Метод Эйлера	96
4.7. Методы Абеля	97
4.8. Теорема о включении для абелевских средних	99
4.9. Комплексные методы	103
4.10. Суммируемость ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ отдельными методами Абеля	104
4.11. Методы Линделёфа и Миттаг-Леффлера	104
4.12. Методы суммирования, определяемые целыми функциями	107
4.13. Моментные методы	109
4.14. Теорема совместности	112
4.15. Методы, неэффективные для ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$	113
4.16. Нормальные средние Рисса	114
4.17. Методы, возникшие под влиянием теории рядов Фурье	116
4.18. Общий принцип	118
Примечания к главе IV	120
Глава V. Арифметические средние (1)	123
5.1. Введение	123
5.2. Методы Гёльдера	123
5.3. Элементарные теоремы относительно суммируемости по Гёльдеру	124
5.4. Методы Чезаро	125
5.5. Средние нецелого порядка	127
5.6. Теорема о свертках	128
5.7. Простейшие теоремы относительно суммируемости по Чезаро	130
5.8. Теорема равносильности	133
5.9. Теорема Мерсера и доказательство Шура теоремы равносильности	135
5.10. Другие доказательства теоремы Мерсера	137
5.11. Бесконечные пределы	139
5.12. Суммируемость по Чезаро и по Абелю	140
5.13. Чезаровские средние как средние Вороного	141
5.14. Интегралы	142
5.15. Теоремы о суммируемых интегралах	144
5.16. Риссовские арифметические средние	145
5.17. Равномерно распределенные последовательности	148
5.18. Равномерная распределенность последовательности $\{n^2\alpha\}$	151
Примечания к главе V	152
Глава VI. Арифметические средние (2)	156
6.1. Теоремы тауберова типа для методов Чезаро	156
6.2. Медленно колеблющиеся и медленно убывающие функции	160
6.3. Другое условие тауберова типа	163
6.4. Теоремы о выпуклости	163
6.5. Множители сходимости	164
6.6. Множитель $\frac{1}{(n+1)^s}$	168
6.7. Другое условие суммируемости	170
6.8. Интегралы	173
6.9. Биномиальный ряд	175
6.10. Ряд $\sum n^a e^{ni\theta}$	178
6.11. Случай $\beta = -1$	178
6.12. Ряд $\sum \frac{e^{Ain^a}}{n^b}$	180
Примечания к главе VI	185

Глава VII. Теоремы тауберова типа для степенных рядов	189
7.1. Теоремы абелева и тауберова типов	189
7.2. Первая теорема Таубера	191
7.3. Вторая теорема Таубера	192
7.4. Применения к общим рядам Дирихле	194
7.5. Более глубокие теоремы тауберова типа	195
7.6. Доказательство теорем 96 и 96а	198
7.7. Доказательство теорем 91 и 91а	201
7.8. Дальнейшие замечания о связях между теоремами § 7.5	205
7.9. Ряд $\sum \frac{1}{n^{1+ic}}$	207
7.10. Медленно колеблющиеся и медленно убывающие функции	208
7.11. Другое обобщение теоремы 98	210
7.12. Метод Харди и Литтльвуда	215
7.13. Теорема о „больших показателях“	218
Примечания к главе VII	221
Глава VIII. Методы Эйлера и Бореля (1)	224
8.1. Введение	224
8.2. (E, q)-метод	224
8.3. Простые свойства (E, q)-метода	225
8.4. Формальные связи между методами Эйлера и Бореля	228
8.5. Методы Бореля	229
8.6. Нормальная, абсолютная и регулярная суммируемость	231
8.7. Теоремы абелева типа для метода суммирования Бореля	231
8.8. Аналитическое продолжение функции, регулярной в начале; многоугольник суммируемости	234
8.9. Ряды, представляющие функции с особенностью в начале	237
8.10. Аналитическое продолжение другими методами	239
8.11. Суммируемость некоторых асимптотических рядов	240
Примечания к главе VIII	245
Глава IX. Методы Эйлера и Бореля (2)	251
9.1. Элементарные леммы	251
9.2. Доказательство теоремы 137	253
9.3. Доказательство теоремы 139	255
9.4. Еще одна элементарная лемма	257
9.5. Теорема Островского о сверхсходимости	258
9.6. Теоремы тауберова типа для метода Бореля	260
9.7. Теоремы тауберова типа (продолжение)	263
9.8. Примеры рядов, не суммируемых (B)	266
9.9. Теорема противоположного характера	267
9.10. Метод суммирования (e, c)	268
9.11. Суммируемость (γ, k)	273
9.12. Дальнейшие замечания о теоремах 150—155	275
9.13. Основная теорема тауберова типа	275
9.14. Обобщения	277
9.15. Ряд $\sum z^n$	278
9.16. Методы Валлирона	279
Примечания к главе IX	280
Глава X. Умножение рядов	283
10.1. Формальные правила умножения рядов	283
10.2. Классические теоремы об умножении по правилу Коши	284
10.3. Умножение суммируемых рядов	285

10.4. Другие теоремы о сходимости произведения рядов	287
10.5. Дальнейшие применения теоремы 170	289
10.6. Знакопередающиеся ряды	290
10.7. Формальное перемножение рядов	291
10.8. Умножение интегралов	292
10.9. Суммируемость по Эйлеру	294
10.10. Суммируемость по Борелю	295
10.11. Правило умножения Дирихле	297
10.12. Ряды, бесконечные в обоих направлениях	298
10.13. Аналоги теорем Коши и Мертенса	300
10.14. Дальнейшие теоремы	301
10.15. Аналог теоремы Абеля	304
Примечания к главе X	304
Глава XI. Хаусдорфовские средние	307
11.1. Преобразование δ	307
11.2. Выражение преобразований (E, q) и $(C, 1)$ через δ	308
11.3. Общее хаусдорфовское преобразование	309
11.4. Общие гёльдеровские и чезаровские преобразования как \mathfrak{H} -преобразования	311
11.5. Условия регулярности вещественных хаусдорфовских преобразований	313
11.6. Абсолютно монотонные последовательности	314
11.7. Окончательный вид условий регулярности	316
11.8. Моменты	318
11.9. Теорема Хаусдорфа	320
11.10. Включение и равносильность \mathfrak{H} -методов	324
11.11. Теорема Мерсера и равносильность гёльдеровских и чезаровских средних	326
11.12. Некоторые частные случаи	329
11.13. Логарифмические случаи	331
11.14. Экспоненциальный случай	332
11.15. Ряд Лежандра для $\chi(x)$	335
11.16. Моменты для функций специальных классов	337
11.17. Одно неравенство для хаусдорфовских средних	338
11.18. Непрерывные преобразования	341
11.19. Квази-хаусдорфовские преобразования	343
11.20. Регулярность квази-хаусдорфовского преобразования	345
11.21. Примеры	346
Примечания к главе XI	347
Глава XII. Тауберовы теоремы Винера	350
12.1. Введение	350
12.2. Условие Винера	352
12.3. Леммы о преобразованиях Фурье	354
12.4. Леммы относительно класса U	355
12.5. Заключительные леммы	358
12.6. Доказательство теорем 221 и 220	361
12.7. Вторая теорема Винера	363
12.8. Теоремы для интервала $(0, \infty)$	365
12.9. Некоторые специальные ядра	368
12.10. Применение общих теорем к некоторым специальным ядрам	370
12.11. Применения к теории простых чисел	373
12.12. Односторонние условия	375
12.13. Теорема Виджаярагавана	377
12.14. Доказательство теоремы 238	380
12.15. Суммируемость по Борелю	384

12.16. Суммируемость $(R, 2)$	387
Примечания к главе XII	389
Глава XIII. Формула суммирования Эйлера-Маклорена	392
13.1. Введение	392
13.2. Числа Бернулли и многочлены Бернулли	394
13.3. Ассоциированные периодические функции	396
13.4. Знаки функций $\varphi_n(x)$	397
13.5. Формула суммирования Эйлера-Маклорена	398
13.6. Пределы при $n \rightarrow \infty$	402
13.7. Знак и величина остаточного члена	403
13.8. Пуассоновское доказательство формулы Эйлера-Маклорена	406
13.9. Об одной формуле Фурье	407
13.10. Случай $f(x) = \frac{1}{x^s}$ и дзета-функция Римана	408
13.11. Случай $f(x) = \log(x+c)$ и теорема Стирлинга	410
13.12. Обобщение формулы Эйлера-Маклорена	413
13.13. Другие формулы для C	414
13.14. Исследование формулы Эйлера-Маклорена посредством комплексного интегрирования	417
13.15. Суммируемость ряда Эйлера-Маклорена	420
13.16. Дополнительные замечания	425
13.17. \mathfrak{N} -определение суммы расходящегося ряда	426
Примечания к главе XIII	427
<i>Приложение I.</i> О вычислении некоторых определенных интегралов с помощью расходящихся рядов	429
<i>Приложение II.</i> Ядра Фурье некоторых методов суммирования	442
<i>Приложение III.</i> О суммируемости по Риману и по Абелю	450
<i>Приложение IV.</i> О суммируемости по Ламберту и по Ингаму	458
<i>Приложение V.</i> Две теоремы Картрайт	470
С. Б. Стечкин. Методы суммирования С. Н. Бернштейна и В. Рого- зинского	479
Указатель книг	493
Указатель журналов	496
Указатель определений	498

Редактор С. Б. Стечкин

Техн. редакторы А. Н. Никифорова и Е. С. Герасимова
Корректор А. Н. Огорокова

Сдано в производство 10/IV 1951 г.

Подписано к печати 17/VII 1951 г.

А-06539.

Бумага $60 \times 92 \frac{1}{10} = 15,8$ бум. л. — 31,6 печ. л.

Уч.-издат. л. 35,7.

Изд. № 1/994.

Цена 29 р. 50 к. Зак. 2499.