

М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ и Б. В. ШАБАТ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

*Допущено Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов механических
специальностей механико-математических факультетов,
физических и физико-математических факультетов госу-
дарственных университетов.*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1951 ЛЕНИНГРАД

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
-----------------------	---

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Комплексные числа	10
1. Комплексные числа	10
2. Геометрическая иллюстрация	12
§ 2. Функции комплексного переменного	15
3. Геометрические понятия	15
4. Функции комплексного переменного	17
5. Дифференцируемость и аналитичность	18
§ 3. Элементарные функции	22
6. Функции $w = z^n$ и $w = \sqrt[n]{z}$	23
7. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$	27
8. Показательная функция и логарифм	29
9. Тригонометрические и гиперболические функции	33
10. Общая степенная функция $w = z^a$	38
§ 4. Интегрирование функций комплексного переменного	39
11. Интеграл от функции комплексного переменного	39
12. Теорема Коши	41
13. Распространение на многосвязные области	46
14. Формула Коши и теорема о среднем	49
15. Принцип максимума и лемма Шварца	50
16. Равномерная сходимость	53
17. Высшие производные	57
§ 5. Представление аналитических функций рядами	59
18. Ряды Тейлора	59
19. Степенные ряды	61
20. Теорема единственности	65
21. Ряды Лорана	66
22. Особые точки	70
23. Теорема о вычетах. Принцип аргумента	75

24. Бесконечно удалённая точка	81
25. Аналитическое продолжение	83
26. Римановы поверхности	89
Литература к гл. I	93

ГЛАВА II

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Общие положения. Примеры	95
27. Понятие конформного отображения	96
28. Основная задача	101
29. Соответствие границ	104
30. Примеры	109
§ 2. Простейшие конформные отображения	115
31. Дробно-линейные отображения	115
32. Частные случаи	121
33. Примеры	126
34. Отображения круговых луночек	134
§ 3. Принцип симметрии и отображение многоугольников	143
35. Принцип симметрии	143
36. Примеры	148
37. Отображение многоугольников	154
38. Дополнительные замечания	159
39. Примеры	163
40. Скругление углов	171
Литература к гл. II	175

ГЛАВА III

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Гармонические функции	177
41. Свойства гармонических функций	178
42. Свойства гармонических функций (продолжение)	186
43. Задача Дирихле	192
44. Примеры. Дополнения	199
45. Метод сеток	206
§ 2. Физические представления. Постановка краевых задач	210
46. Плоское поле и комплексный потенциал	210
47. Физические представления	220
48. Краевые задачи	229
49. Примеры. Приложения	235
50. Плоская задача теории упругости	243
51. Краевые задачи теории упругости	250

§ 3. Интеграл типа Коши и краевые задачи	256
52. Интеграл типа Коши. Формулы Сохоцкого	257
53. Краевая задача Гильберта-Привалова	264
54. Формула Келдыша-Седова	270
55. Другие краевые задачи	276
56. Примеры. Приложения	284
Литература к главе III	289

ГЛАВА IV

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

§ 1. Основные вариационные принципы	290
57. Основной вариационный принцип	290
58. Распространение принципа	295
59. Граничные производные	300
§ 2. Отображения близких областей	304
60. Области, близкие к кругу	304
61. Области, близкие к данной	311
62. Распространение результатов	313
§ 3. Приложения	320
63. Пересчёт подъёмной силы	320
64. Волны в тяжёлой жидкости	324
65. Обтекание со срывом струй	329
66. Движение грунтовых вод	332
Литература к главе IV.	338

ГЛАВА V

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ К АНАЛИЗУ

§ 1. Разложение в ряды и бесконечные произведения	340
67. Ряды Тейлора и Лорана	340
68. Разложение мероморфных функций на простейшие дроби	347
69. Разложение целых функций в бесконечные произведения	353
§ 2. Приложения теории вычетов	359
70. Вычисление интегралов	359
71. Вычисление интегралов (продолжение)	367
72. Подсчёт числа нулей. Метод Вышнеградского	374
§ 3. Методы асимптотических оценок	382
73. Асимптотические разложения	383
74. Метод перевала	386
75. Другие методы	391
Литература к главе V.	395

ГЛАВА VI

ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Основные понятия и методы	398
76. Преобразование Лапласа	398
77. Свойства преобразования Лапласа	407
78. Теоремы умножения	412
79. Теоремы разложения	417
80. Примеры. Дополнения	424
§ 2. Приложения	438
81. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы	438
82. Расчёт электрических контуров	444
83. Уравнения в частных производных	452
84. Расчёт длинных линий	459
Литература к главе VI.	466

ГЛАВА VII

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Гамма-функция Эйлера	467
85. Определение и основные свойства	467
86. Примеры. Дополнения	476
§ 2. Ортогональные многочлены	482
87. Ортогональные системы функций	482
88. Ортогональные многочлены	488
89. Выражение через вес. Производящие функции	493
90. Примеры. Приложения	501
§ 3. Цилиндрические функции	513
91. Цилиндрические функции первого рода	514
92. Другие цилиндрические функции	524
93. Асимптотические выражения для цилиндрических функций	532
94. Графики цилиндрических функций. Распределение нулей	541
95. Примеры. Приложения	547
§ 4. Эллиптические функции	559
96. Периодические функции	560
97. Общие свойства эллиптических функций	565
98. Эллиптические интегралы и функции Якоби	571
99. Функции Вейерштрасса. Тета-функции	579
100. Примеры. Приложения	590
Литература к главе VII.	598
Алфавитный указатель	599