

А. Б. ШИДЛОВСКИЙ

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.13
Ш56
УДК 511.3

Шидловский А. Б. **Трансцендентные числа.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 448 с.

Излагаются важнейшие результаты, полученные в теории трансцендентных чисел с помощью одного из основных ее методов, являющегося обобщением классического метода Эрмита — Линдемана. Этот метод ведет свое начало от работы К. Зигеля, опубликованной в 1929 г., и получил за последние 30 лет существенное развитие. С его помощью была установлена иррациональность, трансцендентность и алгебраическая независимость значений некоторых классов аналитических функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами.

Для научных сотрудников, работающих в области теории чисел, теории функций и алгебры, а также для студентов, аспирантов университетов и педагогических институтов.

Библиогр. 235 назв.

Рецензент доктор физико-математических наук *С. А. Степанов*

Ш 1702030000—096 36-87
053(02)-87

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Обозначения	9
Введение	11
§ 1. Приближение алгебраических чисел	11
§ 2. Классический метод Эрмита — Линдемана	13
§ 3. Методы, возникшие при решении седьмой проблемы Гильберта, и их дальнейшее развитие	15
§ 4. Метод Зигеля и его дальнейшее развитие	17
Глава 1. Приближение действительных и алгебраических чисел	22
§ 1. Приближение действительных чисел рациональными числами	22
§ 2. Совместные приближения	29
§ 3. Приближение алгебраических чисел рациональными числами	34
§ 4. Приближение алгебраических чисел алгебраическими числами	37
§ 5. Дальнейшие усиления и обобщения теоремы Лиувилля	46
Замечания	48
Глава 2. Арифметические свойства значений показательной функции в алгебраических точках	51
§ 1. Трансцендентность числа e	51
§ 2. Трансцендентность числа π	56
§ 3. Трансцендентность значений показательной функции в алгебраических точках	60
§ 4. Приближение функции e^z рациональными функциями	67
§ 5. Линейная приближающая форма для функций $e^{\rho_1 z}, \dots, e^{\rho_m z}$	72
§ 6. Совокупность линейных приближающих форм	77
§ 7. Теорема Линдемана	78
§ 8. Линейные приближающие формы и разложение показательной функции в интерполяционный ряд Ньютона	83
Замечания	85
Глава 3. Трансцендентность и алгебраическая независимость значений E-функций, не связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций	87
§ 1. E-функции	87
§ 2. Первая основная теорема	89
§ 3. Некоторые свойства линейных и дробно-линейных форм	93
§ 4. Свойства линейных форм от функций, удовлетворяющих системе линейных однородных дифференциальных уравнений	96
§ 5. Порядок нуля линейной формы при $z = 0$	100
§ 6. Определитель системы линейных форм	106
§ 7. Переход к числовым линейно независимым линейным формам	107
§ 8. Вспомогательные предложения о решениях систем линейных однородных уравнений	109

§	9. Функциональные линейные приближающие формы . . .	112
§	10. Числовые линейные приближающие формы . . .	116
§	11. Ранг совокупности чисел $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$. . .	120
§	12. Доказательство первой основной теоремы . . .	122
§	13. Следствия из первой основной теоремы . . .	125
	Замечания . . .	131
Глава 4. Трансцендентность и алгебраическая независимость значений E-функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций 133		
§	1. Ранг совокупности чисел $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$. . .	133
§	2. Вспомогательные предложения . . .	136
§	3. Оценки размерностей векторных пространств, порожденных произведениями степеней элементов из расширения некоторого поля	139
§	4. Третья основная теорема	143
§	5. Трансцендентность значений E-функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$. . .	147
§	6. Алгебраическая независимость значений E-функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$. . .	152
§	7. E-функции, связанные уравнениями специального вида . . .	154
§	8. E-функции, связанные алгебраическими уравнениями с постоянными коэффициентами	156
§	9. E-функции, связанные одним алгебраическим уравнением над $\mathbb{C}(z)$	162
§	10. Минимальные уравнения	168
§	11. Размерности векторных пространств, порожденных произведениями степеней элементов из расширения некоторого поля	173
§	12. Алгебраическая независимость значений IE-функций . . .	176
§	13. Алгебраическая независимость значений KE-функций . . .	179
	Замечания	182
Глава 5. Трансцендентность и алгебраическая независимость значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка 184		
§	1. Гипергеометрические E-функции	184
§	2. Простейшая гипергеометрическая E-функция	189
§	3. Совокупность решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка	197
§	4. Вспомогательные предложения	199
§	5. Доказательства теорем	202
	Замечания	208
Глава 6. Алгебраическая независимость значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка 210		
§	1. Общая теорема об алгебраической независимости значений E-функции и ее производной	210
§	2. Функции $K_\lambda(z)$, связанные с функциями Бесселя	212
§	3. Функции $K_\lambda(z)$ и e^z	221
§	4. Функции Куммера	224
§	5. Решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений	229
	Замечания	233
Глава 7. Решения некоторых линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка 234		
§	1. Решения неоднородных дифференциальных уравнений . . .	234

§ 2.	Решения однородных дифференциальных уравнений	240
§ 3.	Следствия из теорем 1 и 2	245
	Замечания	248
Глава 8. Исследование решений линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка арифметическим методом		250
§ 1.	Формулировки теорем	250
§ 2.	Вспомогательные предложения	253
§ 3.	Доказательства теорем 1—5	258
§ 4.	Доказательства теорем 6 и 7	262
§ 5.	Дальнейшие результаты	264
Глава 9. Теорема Зигеля		271
§ 1.	Формулировки теоремы и основных вспомогательных предложений	271
§ 2.	Вспомогательные предложения	273
§ 3.	Некоторые свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка	278
§ 4.	Алгебраическая независимость решений совокупности линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка	283
§ 5.	Доказательство теоремы Зигеля	286
§ 6.	Решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений	290
§ 7.	Обобщение теоремы Зигеля	299
Глава 10. Решения линейных дифференциальных уравнений простого порядка p		305
§ 1.	Формулировки основных результатов	305
§ 2.	Однородный идеал \mathcal{I}	312
§ 3.	Алгебраические функции нескольких переменных	314
§ 4.	Дифференциальный оператор G	317
§ 5.	Дифференциальные операторы S и δ	320
§ 6.	Лемма о линейном приближении	324
§ 7.	Завершение доказательства теоремы 7	327
§ 8.	Линейная приводимость	330
§ 9.	Доказательства теорем 6 и 5	339
	Замечания	344
Глава 11. Мера алгебраической независимости значений IE-функций		346
§ 1.	Определения мер	346
§ 2.	Мера линейной независимости значений IE-функций	353
§ 3.	Мера алгебраической независимости значений IE-функций, не связанных алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$	357
§ 4.	Вспомогательные предложения	362
§ 5.	Мера алгебраической независимости значений IE-функций, связанных алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$	366
§ 6.	Некоторые применения общих теорем	369
	Замечания	373
Глава 12. Мера алгебраической независимости значений KE-функций		374
§ 1.	Основная лемма	374
§ 2.	Оценки мер значений E-функций, не связанных алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$	379
§ 3.	Оценки мер значений E-функций, связанных одним алгебраическим уравнением над $\mathbb{C}(z)$	382

§ 4. Оценки мер значений E-функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$	384
§ 5. Алгебраическая независимость значений E-функций в сопряженных полях	386
§ 6. Вспомогательная теорема	387
§ 7. Следствия из вспомогательной теоремы	392
§ 8. Некоторые применения общих теорем	394
Замечания	398
Глава 13. Эффективные оценки мер	399
§ 1. Определения и обозначения	399
§ 2. Уточнение основных лемм метода	403
§ 3. Оценка мер линейной независимости	411
§ 4. Оценка мер алгебраической независимости	414
§ 5. Некоторые применения общих теорем	420
Замечания	427
Заключительные замечания	428
Список литературы	436