

А. Б. ШИДЛОВСКИЙ

# ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1987

ББК 22.13  
Ш56  
УДК 511.3

Шидловский А. Б. **Трансцендентные числа.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 448 с.

Излагаются важнейшие результаты, полученные в теории трансцендентных чисел с помощью одного из основных ее методов, являющегося обобщением классического метода Эрмита — Линдемана. Этот метод ведет свое начало от работы К. Зигеля, опубликованной в 1929 г., и получил за последние 30 лет существенное развитие. С его помощью была установлена иррациональность, трансцендентность и алгебраическая независимость значений некоторых классов аналитических функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами.

Для научных сотрудников, работающих в области теории чисел, теории функций и алгебры, а также для студентов, аспирантов университетов и педагогических институтов.

Библиогр. 235 назв.

Рецензент доктор физико-математических наук *С. А. Степанов*

Ш 1702030000—096 36-87  
053(02)-87

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1987

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
Обозначения . . . . .	9
<b>Введение</b> . . . . .	<b>11</b>
§ 1. Приближение алгебраических чисел . . . . .	11
§ 2. Классический метод Эрмита — Линдемана . . . . .	13
§ 3. Методы, возникшие при решении седьмой проблемы Гильберта, и их дальнейшее развитие . . . . .	15
§ 4. Метод Зигеля и его дальнейшее развитие . . . . .	17
<b>Глава 1. Приближение действительных и алгебраических чисел</b> . . . . .	<b>22</b>
§ 1. Приближение действительных чисел рациональными числами . . . . .	22
§ 2. Совместные приближения . . . . .	29
§ 3. Приближение алгебраических чисел рациональными числами . . . . .	34
§ 4. Приближение алгебраических чисел алгебраическими числами . . . . .	37
§ 5. Дальнейшие усиления и обобщения теоремы Лиувилля . . . . .	46
Замечания . . . . .	48
<b>Глава 2. Арифметические свойства значений показательной функции в алгебраических точках</b> . . . . .	<b>51</b>
§ 1. Трансцендентность числа $e$ . . . . .	51
§ 2. Трансцендентность числа $\pi$ . . . . .	56
§ 3. Трансцендентность значений показательной функции в алгебраических точках . . . . .	60
§ 4. Приближение функции $e^z$ рациональными функциями . . . . .	67
§ 5. Линейная приближающая форма для функций $e^{\rho_1 z}, \dots, e^{\rho_m z}$ . . . . .	72
§ 6. Совокупность линейных приближающих форм . . . . .	77
§ 7. Теорема Линдемана . . . . .	78
§ 8. Линейные приближающие формы и разложение показательной функции в интерполяционный ряд Ньютона . . . . .	83
Замечания . . . . .	85
<b>Глава 3. Трансцендентность и алгебраическая независимость значений E-функций, не связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций</b> . . . . .	<b>87</b>
§ 1. E-функции . . . . .	87
§ 2. Первая основная теорема . . . . .	89
§ 3. Некоторые свойства линейных и дробно-линейных форм . . . . .	93
§ 4. Свойства линейных форм от функций, удовлетворяющих системе линейных однородных дифференциальных уравнений . . . . .	96
§ 5. Порядок нуля линейной формы при $z = 0$ . . . . .	100
§ 6. Определитель системы линейных форм . . . . .	106
§ 7. Переход к числовым линейно независимым линейным формам . . . . .	107
§ 8. Вспомогательные предложения о решениях систем линейных однородных уравнений . . . . .	109

§	9. Функциональные линейные приближающие формы . . .	112
§	10. Числовые линейные приближающие формы . . .	116
§	11. Ранг совокупности чисел $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ . . .	120
§	12. Доказательство первой основной теоремы . . .	122
§	13. Следствия из первой основной теоремы . . .	125
	Замечания . . .	131
<b>Глава 4. Трансцендентность и алгебраическая независимость значений E-функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций . . .</b>		
§	1. Ранг совокупности чисел $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$ . . .	133
§	2. Вспомогательные предложения . . .	136
§	3. Оценки размерностей векторных пространств, порожденных произведениями степеней элементов из расширения некоторого поля . . .	139
§	4. Третья основная теорема . . .	143
§	5. Трансцендентность значений E-функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$ . . .	147
§	6. Алгебраическая независимость значений E-функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$ . . .	152
§	7. E-функции, связанные уравнениями специального вида . . .	154
§	8. E-функции, связанные алгебраическими уравнениями с постоянными коэффициентами . . .	156
§	9. E-функции, связанные одним алгебраическим уравнением над $\mathbb{C}(z)$ . . .	162
§	10. Минимальные уравнения . . .	168
§	11. Размерности векторных пространств, порожденных произведениями степеней элементов из расширения некоторого поля . . .	173
§	12. Алгебраическая независимость значений IE-функций . . .	176
§	13. Алгебраическая независимость значений KE-функций . . .	179
	Замечания . . .	182
<b>Глава 5. Трансцендентность и алгебраическая независимость значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка . . .</b>		
§	1. Гипергеометрические E-функции . . .	184
§	2. Простейшая гипергеометрическая E-функция . . .	189
§	3. Совокупность решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка . . .	197
§	4. Вспомогательные предложения . . .	199
§	5. Доказательства теорем . . .	202
	Замечания . . .	208
<b>Глава 6. Алгебраическая независимость значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка . . .</b>		
§	1. Общая теорема об алгебраической независимости значений E-функции и ее производной . . .	210
§	2. Функции $K_\lambda(z)$ , связанные с функциями Бесселя . . .	212
§	3. Функции $K_\lambda(z)$ и $e^z$ . . .	221
§	4. Функции Куммера . . .	224
§	5. Решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений . . .	229
	Замечания . . .	233
<b>Глава 7. Решения некоторых линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка . . .</b>		
§	1. Решения неоднородных дифференциальных уравнений . . .	234

§ 2. Решения однородных дифференциальных уравнений . . . . .	240
§ 3. Следствия из теорем 1 и 2 . . . . .	245
Замечания . . . . .	248
<b>Глава 8. Исследование решений линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка арифметическим методом</b> . . . . .	<b>250</b>
§ 1. Формулировки теорем . . . . .	250
§ 2. Вспомогательные предложения . . . . .	253
§ 3. Доказательства теорем 1—5 . . . . .	258
§ 4. Доказательства теорем 6 и 7 . . . . .	262
§ 5. Дальнейшие результаты . . . . .	264
<b>Глава 9. Теорема Зигеля . . . . .</b>	<b>271</b>
§ 1. Формулировки теоремы и основных вспомогательных предложений . . . . .	271
§ 2. Вспомогательные предложения . . . . .	273
§ 3. Некоторые свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	278
§ 4. Алгебраическая независимость решений совокупности линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	283
§ 5. Доказательство теоремы Зигеля . . . . .	286
§ 6. Решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений . . . . .	290
§ 7. Обобщение теоремы Зигеля . . . . .	299
<b>Глава 10. Решения линейных дифференциальных уравнений простого порядка <math>p</math> . . . . .</b>	<b>305</b>
§ 1. Формулировки основных результатов . . . . .	305
§ 2. Однородный идеал $\mathcal{I}$ . . . . .	312
§ 3. Алгебраические функции нескольких переменных . . . . .	314
§ 4. Дифференциальный оператор $G$ . . . . .	317
§ 5. Дифференциальные операторы $S$ и $\delta$ . . . . .	320
§ 6. Лемма о линейном приближении . . . . .	324
§ 7. Завершение доказательства теоремы 7 . . . . .	327
§ 8. Линейная приводимость . . . . .	330
§ 9. Доказательства теорем 6 и 5 . . . . .	339
Замечания . . . . .	344
<b>Глава 11. Мера алгебраической независимости значений IE-функций . . . . .</b>	<b>346</b>
§ 1. Определения мер . . . . .	346
§ 2. Мера линейной независимости значений IE-функций . . . . .	353
§ 3. Мера алгебраической независимости значений IE-функций, не связанных алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$ . . . . .	357
§ 4. Вспомогательные предложения . . . . .	362
§ 5. Мера алгебраической независимости значений IE-функций, связанных алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$ . . . . .	366
§ 6. Некоторые применения общих теорем . . . . .	369
Замечания . . . . .	373
<b>Глава 12. Мера алгебраической независимости значений KE-функций . . . . .</b>	<b>374</b>
§ 1. Основная лемма . . . . .	374
§ 2. Оценки мер значений E-функций, не связанных алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$ . . . . .	379
§ 3. Оценки мер значений E-функций, связанных одним алгебраическим уравнением над $\mathbb{C}(z)$ . . . . .	382

§ 4. Оценки мер значений E-функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$ . . . . .	384
§ 5. Алгебраическая независимость значений E-функций в сопряженных полях . . . . .	386
§ 6. Вспомогательная теорема . . . . .	387
§ 7. Следствия из вспомогательной теоремы . . . . .	392
§ 8. Некоторые применения общих теорем . . . . .	394
Замечания . . . . .	398
<b>Глава 13. Эффективные оценки мер . . . . .</b>	<b>399</b>
§ 1. Определения и обозначения . . . . .	399
§ 2. Уточнение основных лемм метода . . . . .	403
§ 3. Оценка мер линейной независимости . . . . .	411
§ 4. Оценка мер алгебраической независимости . . . . .	414
§ 5. Некоторые применения общих теорем . . . . .	420
Замечания . . . . .	427
<b>Заключительные замечания . . . . .</b>	<b>428</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>436</b>