

**А.А. ПОТАПОВ, Ю. В. ГУЛЯЕВ, С.А. НИКИТОВ,  
А.А. ПАХОМОВ, В.А. ГЕРМАН**

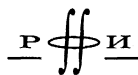
# **НОВЕЙШИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

Под общей редакцией д. ф.-м. н. А.А. Потапова



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2008

УДК 519: 522+621.396.96  
ББК 22.311  
Н 72



*Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 07-07-07005*

Авторский коллектив:

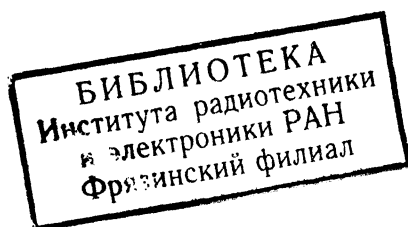
А. А. Потапов, Ю. В. Гуляев, С. А. Никитов, А. А. Пахомов, В. А. Герман

**Новейшие методы обработки изображений.** / Под ред. А. А. Потапова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 496 с. — ISBN 978-5-9221-0841-6.

В монографии впервые систематически рассмотрены и обобщены разработанные авторами новые направления в приложении теории обработки искаженных и малоконтрастных изображений к актуальным задачам радиофизики, астрономии, оптики и радиолокации. Монография состоит из двух частей. В первой части на основе аппарата целочисленной меры Лебега проведен теоретический анализ однозначности восстановления одномерных сигналов и изображений по неполной информации об их Фурье-спектрах. Построены модели на основе использования преобразования Гильберта для связи между модулем и фазой в двумерном случае. При отсутствии условий аналитического решения задач применяются методы проекций на выпуклые множества. Во второй части приведены полученные на основе аппарата дробной меры и дробной размерности результаты фрактального подхода к обработке сверхслабых сигналов и малоконтрастных изображений. Применяются методы моделирования на основе скейлинга и распределения с «тяжелыми хвостами». Эффективность методов фрактальной фильтрации широко иллюстрируется примерами. Изложены принципы синтеза фрактальных обнаружителей.

Для специалистов, интересующихся новыми идеями и современными методами обработки изображений, сигналов и распознавания образов, а также для аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Утверждено к печати Ученым советом ИРЭ РАН 17 ноября 2006 г.



ISBN 978-5-9221-0841-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2008

© Коллектив авторов, 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	10
<b>Глава 1. Вспомогательные математические сведения в их историческом развитии . . . . .</b>	<b>15</b>
1.1. Основы теории множеств и теории меры . . . . .	15
1. Наивная теория множеств (15). 2. Кольца и алгебры (17). 3. Борелевские и суслинские множества (18). 4. Выпуклые множества (19). 5. Общая метрика (20). 6. Функции множеств (20). 7. Категории множеств (21). 8. Мера (22). 9. О теории динамических систем (23).	
1.2. Конструкция Каратеодори, мера Хаусдорфа и размерность Хаусдорфа–Безиковича . . . . .	24
1. Конструкция Каратеодори (25). 2. Мера Хаусдорфа (26). 3. Размерности Хаусдорфа–Безиковича и Колмогорова (27). 4. Первое упоминание о фракталах (29).	
1.3. Основные понятия и свойства топологических пространств . . . . .	30
1. Общая топология (30). 2. Хаусдорфовы топологические пространства (31). 3. Аксиомы топологического пространства (32). 4. Аксиомы отделимости (33). 5. Прямое или декартово произведение топологических пространств (34). 6. Тихоновская топология (34). 7. Некоторые примеры топологических произведений (34). 8. Покрытия (35).	
1.4. Некоторые факты из теории размерности . . . . .	35
1. Исторический аспект (35). 2. Топологические инварианты (36). 3. Общая теория размерности (37). 4. Размерность пространства (39). 5. Некоторые теоремы (40).	
1.5. Линия с точки зрения математика . . . . .	41
1. Немного истории (41). 2. Способы образования кривых (42). 3. Классификация кривых (42). 4. Теоремы Ньютона, Котеса и Шаля (44). 5. Ньютоновская классификация (44). 6. Классы трансцендентных кривых (46). 7. Следующие определения линии (50). 8. Жордановы кривые и пример Пеано (50). 9. Канторовы кривые и пример Серпинского (51). 10. Урысоновское определение линии и пример Менгера (52). 11. Индексы и точки ветвления (53).	
1.6. Недифференцируемые, или фрактальные, функции и множества . . . . .	53
1. Исторический обзор (53). 2. Теорема Дини о функциях, не имеющих производных (56). 3. Множество недифференцируемых функций (58). 4. Стационарность и недифференцируемые функции (59). 5. Графики функций Римана, Вейерштрасса и Такаги (60). 6. Построение функции Больцано (61). 7. Построение функции Безиковича (63). 8. Построение функции Ван-дер-Вардена (64).	
1.7. Функциональные уравнения и хаотические отображения с недифференцируемыми функциями . . . . .	65
1. Недифференцируемые функции и функциональные уравнения (65). 2. Недифференцируемые функции и хаотические отображения (67).	
1.8. О построении фрактальных множеств . . . . .	70
1. Теоремы (70). 2. Примеры фрактальных множеств (72).	

1.9. Фракталы и детерминированный хаос без формул . . . . .	74
1. Геометрия Природы (74). 2. Так что же такое фрактал? (76). 3. Детерминированный хаос и синергетика (77). 4. Рекурсия (79). 5. Классические фрактальные кривые и множества (79). 6. Фракталы в картинках: Острова, драконы, пыль. А что еще? (84). 7. Методы синтеза фракталов и фрактальные множества на комплексной плоскости (85).	
1.10. Броуновское движение и его математическое описание . . . . .	88
1. Краткая история вопроса (88). 2. Уравнение Смолуховского (для физиков) или уравнение Колмогорова–Чепмена (для математиков) (89). 3. Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (91). 4. Модель Винера броуновского движения и его определения (91). 5. Самоподобие броуновского движения (92). 6. Белый шум (93). 7. О недифференцируемых функциях (93). 8. Модель Ланжевена (93). 9. Стохастические дифференциальные уравнения (94). 10. Интеграл Ито и интеграл Стратоновича (95). 11. Некоторые свойства стохастического интеграла (95). 12. Условия существования и единственности решения (97). 13. Формула Ито (97). 14. Связь между интегралом Ито и интегралом Стратоновича (98). 15. Процесс Орнштейна–Уленбека (99). 16. Мультипликативный белый шум (100).	
1.11. Формализм нечетких множеств и нечетких интегралов . . . . .	100
1. Понятие нечетких множеств (100). 2. Формализация нечетких понятий (101). 3. Основные операции в алгебре нечетких множеств (102). 4. Некоторые свойства нечетких мер (106). 5. Классы нечетких мер (107). 6. Понятие нечеткого интеграла и его свойства (110). 7. Нечеткий интеграл и интеграл Лебега (111). 8. Условная нечеткая мера (112). 9. Операции композиции и фракталы (112).	
1.12. Основные идеи и методы кластерного анализа . . . . .	114
1. Исходная постановка (114). 2. Меры расстояния между классами множества (114). 3. Меры сходства (115). 4. Меры рассеяния (117). 5. Меры межкластерного расстояния (117). 6. Необходимое число кластеров (119).	
Список литературы к главе 1 . . . . .	120
<b>Глава 2. Аналитические методы решения обратных задач в оптике . . . .</b>	<b>125</b>
2.1. Фазовая и амплитудная проблемы . . . . .	125
1. Историческая справка (125). 2. Используемый математический аппарат (125).	
2.2. Постановка задачи . . . . .	126
1. Начальные сведения (126). 2. Априорные ограничения (127).	
2.3. Аналитические свойства одномерного Фурье-спектра . . . . .	128
1. Целые функции и их свойства (128). 2. Интегральная формула Коши (130). 3. Симметрия изображения и субизображения (130).	
2.4. Дискретный случай . . . . .	131
1. Ограничение на положение изображения (132). 2. Обобщенное $z$ -преобразование (133). 3. Свойства многомерных полиномов (134).	
2.5. Взаимосвязь компонент пространственного спектра в непрерывном случае . . . . .	136
1. Вывод одномерных преобразований Гильберта из формулы Коши (136). 2. Вывод преобразований Гильберта с помощью обобщенных функций (137). 3. Вывод логарифмических преобразований Гильберта из формулы Коши (138). 4. Минимально-фазовое решение (140).	

2.6. Взаимосвязь компонент пространственного спектра в дискретном случае	141
1. Вывод одномерных преобразований Гильберта из формулы Коши (141).	
2. Вывод логарифмических преобразований Гильберта из формулы Коши (142).	
2.7. Анализ однозначности фазовой проблемы в одномерном случае . . . . .	144
1. Непрерывное изображение (144). 2. Переброска корней (144). 3. Новое решение (145). 4. Построение всех решений (147). 5. Дискретное изображение (148). 6. Построение всех решений в дискретном случае (148).	
2.8. Поведение корней Фурье-спектра. . . . .	151
1. Асимптотика корней (151). 2. Ограниченность полосы корней (151). 3. Экспоненциальная фильтрация изображения (152). 4. Свойства целых функций многих комплексных переменных (153).	
2.9. Взаимосвязь компонент пространственного спектра непрерывной финитной функции в двумерном случае . . . . .	154
1. Вывод двумерных непрерывных преобразований Гильберта с помощью обобщенных функций (154). 2. Дополнительные интегральные связи (155). 3. Вывод двумерных логарифмических преобразований Гильберта в непрерывном случае из формулы Коши (155). 4. Двумерные минимально-фазовые соотношения и условие замкнутости (158).	
2.10. Взаимосвязь компонент спектра дискретной функции в двумерном случае	160
1. Вывод двумерных дискретных преобразований Гильберта из формулы Коши (161). 2. Дополнительные интегральные связи (161). 3. Двумерные логарифмические преобразования Гильберта в дискретном случае (162). 4. Двумерные дискретные минимально-фазовые соотношения и условие замкнутости фазы (163).	
2.11. Общий метод сведения двумерного дискретного случая к одномерному . .	166
1. Построчное вытягивание изображения и соответствующей ему автокорреляции (166). 2. Построчное вытягивание изображения с нулями и соответствующей автокорреляции (168). 3. Комбинированное вытягивание (169). 4. Нахождение всех решений фазовой проблемы в двумерном дискретном случае (170). 5. Сведение двумерного дискретного случая амплитудной проблемы к одномерному (171).	
2.12. Качественный анализ непрерывного двумерного случая фазовой проблемы	171
1. Переброска корней и условие замкнутости (172). 2. Локальная и глобальная переброска корней (173). 3. Построение всех решений, когда исходное изображение является сверткой субизображений (173).	
2.13. Однозначность решений фазовой и амплитудной проблем в дискретном случае. . . . .	175
1. Мера Лебега (175). 2. Применение аппарата меры Лебега к фазовой проблеме (176). 3. Мера Лебега и амплитудная проблема (178).	
2.14. Заключительные замечания. . . . .	178
2.15. Приложение I . . . . .	179
Список литературы к главе 2. . . . .	183
<b>Глава 3. Моделирование и обработка серии искаженных атмосферой изображений . . . . .</b>	<b>187</b>
3.1. Моделирование искаженных атмосферой изображений. . . . .	187
1. Линейная оптическая система (187). 2. Статистика атмосферной турбулентности (188). 3. Алгоритм моделирования искаженных атмосферой независимых изображений (189). 4. Результаты моделирования (192).	

3.2. Обработка длинной серии слабых астрономических изображений, искаженных атмосферой . . . . .	195
1. Краткая история вопроса (195). 2. Постановка задачи и определение МТК (196). 3. Дискретный случай МТК (198). 4. Восстановление фазы (198). 5. Инвариантность МТК к сдвигу и развороту изображения (199).	
3.3. Тройные корреляции фотоотсчетных изображений . . . . .	200
1. Детекторы фотоотсчетных изображений (200). 2. Специфика фотонных пуассоновских изображений в МТК (201).	
3.4. Тройные корреляции искаженных атмосферой коротко-экспозиционных изображений . . . . .	202
1. Коротко-экспозиционные и длинно-экспозиционные изображения (202). 2. Параметр Фрида (203). 3. Расчет средней передаточной функции ТК (204).	
3.5. Средний биспектр коротко-экспозиционных изображений. . . . .	204
1. Ограничения и приближения для атмосферных параметров (204). 2. Переход к парным корреляциям (206). 3. Точность оценки фазы (206).	
3.6. Точность восстановления спектра по среднему биспектру. . . . .	207
1. Точность восстановления модуля (207). 2. Точность восстановления фазы. Одномерный случай (208). 3. Точность восстановления фазы. Двумерный случай (210). 4. Сравнение методов восстановления изображений (211). 5. Алгоритм обработки слабых изображений (211).	
3.7. Обработка длинной серии ярких изображений, искаженных атмосферой . . . . .	214
1. Специфика получения изображений (214). 2. Математическое обоснование МТК (214). 3. Восстановление изображения методом парных корреляций (215). 4. Результаты обработки астрономических изображений (216).	
3.8. Обработка короткой серии ярких изображений, искаженных атмосферой . . . . .	218
1. Специфика задачи и методы ее решения (218). 2. Известные практические методы решения (220). 3. Недостатки известных астрономических методов (222). 4. Метод слепой деконволюции и его обобщение (222). 5. Метод совместной деконволюции (223). 6. Обработка методом последовательных проекций (224). 7. Вывод метода из критерия наименьших квадратов (226). 8. Сходимость, однозначность и достоверность метода (228). 9. Моделирование и обработка реальных изображений (231).	
3.9. Обработка серии ярких изображений объектов, быстро меняющих свой ракурс . . . . .	233
1. Специфика задачи (233). 2. Постановка задачи и математические критерии (234). 3. Итерационная процедура решения (235). 4. Сходимость, однозначность и достоверность метода (236). 5. Моделирование и специфика обработки реальных изображений (237).	
3.10. Заключительные замечания . . . . .	239
Список литературы к главе 3. . . . .	241
<b>Глава 4. Обработка одного кадра изображения, искаженного влиянием атмосферы и смазами . . . . .</b>	<b>244</b>
4.1. Обработка изображений, искаженных амплитудным смазом. . . . .	244
1. Постановка проблемы (244). 2. Переформулировка задачи (245). 3. Однозначность решения (245). 4. Алгоритм решения задачи 1 (247). 5. Сходимость алгоритма решения задачи 1 (249). 6. Алгоритм решения задачи 2 (249). 7. Сходимость алгоритма решения задачи 2 (250).	

8. Математическое моделирование (251).	9. Оптимизация параметров алгоритмов (251).	10. Математическое моделирование и обработка реальных изображений (254).	
4.2. Обработка изображений, искаженных симметричным смазом . . . . .			256
1. Постановка задачи (256).	2. Переформулировка задачи (256).	3. Однозначность решения (257).	4. Алгоритм восстановления (258).
5. Сходимость алгоритма (258).	6. Математическое моделирование и обработка реальных изображений (258).	7. Общий подход к задаче на основе метода наименьших квадратов (260).	
4.3. Обработка изображений, искаженных дефокусировкой . . . . .			261
1. Постановка задачи (261).	2. Переформулировка задачи (261).	3. Однозначность восстановления (261).	4. Алгоритм восстановления (262).
5. Сходимость алгоритма (263).	6. Математическое моделирование и обработка реальных изображений (263).	7. Общий подход к задаче на основе метода наименьших квадратов (264).	
4.4. Обработка одного кадра изображения, искаженного случайными атмосферными искажениями и аддитивными шумами регистрации . . . . .			266
1. Постановка задачи (266).	2. Алгоритм восстановления (266).	3. Сходимость алгоритма (267).	4. Алгоритм восстановления путем проектирования на соответствующие множества (267).
5. Математическое моделирование и обработка реальных и цветных изображений (268).			
Список литературы к главе 4 . . . . .			273
<b>Глава 5. Приложения уравнений типа свертки и Фурье-методов для обработки, синтеза и распознавания изображений . . . . .</b>			
5.1. Обработка изображений, искаженных фазовым смазом . . . . .			276
1. Постановка задачи (276).	2. Алгоритм прямого решения (276).	3. Теоретический алгоритм (277).	4. Итерационные алгоритмы (277).
5. Алгоритм шивки фазы (277).	6. Оптимальный алгоритм (278).	7. Алгоритм «встряски» (281).	8. Комбинированный алгоритм (282).
9. Однозначность восстановления изображения (284).	10. Устойчивость к шумам (285).		
5.2. О восстановлении изображения по отношению модулей его Фурье-спектра . . . . .			288
1. Постановка задачи (288).	2. Метод экспоненциальной фильтрации (288).	3. Однозначность восстановления (290).	4. Астрономическая специфика (292).
5. Однозначность восстановления изображения (292).	6. Алгоритмы восстановления (293).		
5.3. Применение методов Фурье-оптики в офтальмологии . . . . .			295
1. Постановка задачи (295).	2. Математическая постановка задачи (295).	3. Расчет прохождения излучения через систему «очки-глаз» (295).	4. Обзор известных технических решений (296).
5. Жидкокристаллические очки (297).			
5.4. Применение методов Фурье-оптики для задач художественного проектирования узоров тканей и гобеленов . . . . .			299
1. Важность фазы спектра (299).	2. Свойства фазовых распределений (300).	3. Алгоритм построения фазовых узоров (302).	4. Алгоритм построения амплитудных узоров (303).
5. Подбор цветовой гаммы (304).			
5.5. Обработка стереоизображений . . . . .			305
1. Постановка задачи (305).	2. Математическая постановка задачи (305).	3. Алгоритм сопряженных точек (306).	4. Пирамидальный алгоритм (307).

5.6. Анализ структуры изображения для построения высокоинформативного вектора признаков . . . . .	310
1. Постановка задачи сегментации и выделения контуров (310). 2. Дифференциальные операторы выделения контура (311). 3. Дискретные аппроксимации (312). 4. Сравнительная оценка методов выделения контуров (316). 5. Методы улучшения контуров (317). 6. Базовые концепции в задаче сегментации изображений (319). 7. Основные характеристики сегментов (321). 8. Выделение причин, порождающих контур (322). 9. Примеры выделения контуров (324).	
Список литературы к главе 5. . . . .	333
<b>Глава 6. Базовые понятия и методология фрактальной обработки многомерных сигналов . . . . .</b>	<b>336</b>
6.1. Фрактальная концепция в современной радиофизике и радиоэлектронике . . . . .	336
1. Научные направления (336). 2. Классификация фракталов (338).	
6.2. Постановка проблемы . . . . .	340
6.3. Размерность подобия . . . . .	342
6.4. Корреляционная размерность . . . . .	344
1. Измерение размерности вложения (344). 2. Корреляционный интеграл (344). 3. Метод последовательного дифференцирования (345). 4. Теорема Такенса (346).	
6.5. Дисперсионная размерность . . . . .	348
6.6. Размерность по максимумам . . . . .	350
1. Пример элементарной оценки $D$ (350). 2. Метод учета сингулярностей при оценке $D$ (350). 3. Метод функционалов (351). 4. Метод триад (352).	
6.7. Оценка размерности по разности мер на разных масштабах . . . . .	352
1. Использование метрики Хаусдорфа (352). 2. Метод «вычитания» выборок (353). 3. Метод на основе операции «Исключающее ИЛИ» (355). 4. Примеры обработки астрономических изображений (355).	
6.8. Распределения фрактальных размерностей изображений . . . . .	356
1. Экспериментальные изображения (356). 2. Распределения фрактальных одномерных разрезов изображений (356). 3. Распределения фрактальных размерностей двумерных сцен (356). 4. Распределения фрактальных размерностей изображений в условиях шумов (360). 5. Параметрический анализ распределений $D$ изображений с помощью диаграммы Пирсона (361). 6. Распределения фрактальной размерности изображений в сильных помехах (365).	
6.9. Вычисление фрактальной размерности изображений . . . . .	366
1. Текстура (366). 2. Моделирование изображения (367). 3. Метод триангуляции (368). 4. Предпосылки для перехода к фрактальной обработке сложных изображений (369).	
6.10. Системы итерированных функций и их применение . . . . .	371
1. Начальные сведения (371). 2. Детерминированный и рандомизированный подходы (371). 3. Теорема о коллаже (372). 4. Построение фракталов (373).	
Список литературы к главе 6. . . . .	379



Глава 7. <b>Фрактальная обработка изображений и сигналов</b> . . . . .	381
7.1. Основные фрактальные признаки изображений . . . . .	381
1. Локальная и глобальная фрактальные размерности (381). 2. Фрактальные сигнатуры и фрактальные кепстры (382).	
7.2. Вычисление фрактальных размерностей изображений различной природы . . . . .	385
1. Оценки $D$ изображений (385). 2. О топологии выборки (386). 3. Программное обеспечение (386).	
7.3. Вейвлеты . . . . .	387
1. История вопроса (387). 2. Разложение по базисным функциям (387). 3. Реконструкция сигнала (390). 4. Кратномасштабный анализ (390). 5. Масштабирующее уравнение (391). 6. Вейвлет «материнский» (392). 7. Вейвлетные ряды (393). 8. Ортонормальный базис (394). 9. Фракталы и вейвлеты: сопоставление (394).	
7.4. Выделение объектов на сложных изображениях. . . . .	396
1. Физика фрактальной обработки (396). 2. Примеры фрактальной обработки или фрактальной фильтрации (398).	
7.5. Топология выборки . . . . .	404
1. Распознавание образов (404). 2. Словарь фрактальных признаков (405). 3. Формальные грамматики (405). 4. Фрактальные примитивы (406).	
7.6. Фрактальное распознавание образов . . . . .	407
1. Фрактальная классификация и кластеризация объектов (407). 2. Фрактальное распознавание тестовых образов (407).	
7.7. Другие примеры фрактальной обработки изображений. . . . .	409
7.8. Разработка и структура словаря фрактальных признаков классов целей . . . . .	419
1. Постановка проблемы (419). 2. Пространственные спектральные сигнатуры для объектов динамического теста в идеальных условиях (419). 3. Тонкая структура фрактальных кепстров фигур динамического теста (424). 4. Влияние числа фигур динамического теста для задач фрактального распознавания (426). 5. Фрактальные сигнатуры для объектов динамического теста при изменении их количества и отсутствии шума (435). 6. Действие аддитивных помех на фрактальные сигнатуры объектов динамического теста (440). 7. Основные выводы (449).	
7.9. Фрактальный непараметрический обнаружитель радиосигналов . . . . .	450
1. Постановка задачи (450). 2. Структурные схемы ФНОРС (451). 3. Системно образующие принципы ФНОРС (452). 4. Избранные примеры фрактальной обработки реальных радиосигналов (454). 5. Вычисление фрактальных характеристик реального сигнала с помощью ФНОРС (455). 6. Способы увеличения отношения сигнал/помеха (460). 7. Заключительные замечания (461).	
7.10. Фрактальное обнаружение акустического импульса . . . . .	462
Список литературы к главе 7. . . . .	468
 Приложение П I. Дополнительный список авторских публикаций по применению теории фракталов в задачах радиофизики, радиотехники, радиолокации и электроники. . . . .	 470