

М. Я. ВЫГОДСКИЙ

СПРАВОЧНИК
ПО
ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Что можно найти в справочнике 15

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ.

§ 1. Понятие о предмете аналитической геометрии	17
§ 2. Координаты	18
§ 3. Прямоугольная система координат	18
§ 4. Прямоугольные координаты	19
§ 5. Координатные углы	20
§ 6. Косоугольная система координат	21
§ 7. Уравнение линии	21
§ 8. Взаимное расположение линии и точки	22
§ 9. Взаимное расположение двух линий	23
§ 10. Расстояние между двумя точками	23
§ 11. Деление отрезка в данном отношении	24
§ 11а. Деление отрезка пополам	25
§ 12. Определитель второго порядка	25
§ 13. Площадь треугольника	25
§ 14. Прямая линия; уравнение, разрешенное относительно ординаты («с угловым коэффициентом»)	26
§ 15. Прямая, параллельная оси	28
§ 16. Общее уравнение прямой	29
§ 17. Построение прямой по ее уравнению	30
§ 18. Условие параллельности прямых	30
§ 19. Пересечение прямых	32
§ 20. Условие перпендикулярности двух прямых	33
§ 21. Угол между двумя прямыми	34
§ 22. Условие, при котором три точки лежат на одной прямой	37
§ 23. Уравнение прямой, проходящей через две точки	37
§ 24. Пучок прямых	39
§ 25. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой	40
§ 26. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой	41
§ 27. Взаимное расположение прямой и пары точек	42
§ 28. Расстояние от точки до прямой	42
§ 29. Полярные параметры прямой	43
§ 30. Нормальное уравнение прямой	45
§ 31. Приведение уравнения прямой к нормальному виду	46
§ 32. Отрезки на осях	47
§ 33. Уравнение прямой в отрезках	48
§ 34. Преобразование координат (постановка вопроса)	48
§ 35. Перенос начала координат	49
§ 36. Поворот осей	50
§ 37. Алгебраические линии и их порядок	52
§ 38. Окружность	53

§ 39. Разыскание центра и радиуса окружности	54
§ 40. Эллипс как сжатая окружность	56
§ 41. Другое определение эллипса	58
§ 42. Построение эллипса по его осям	60
§ 43. Гипербола	61
§ 44. Форма гиперболы; вершины и оси	63
§ 45. Построение гиперболы по ее осям	64
§ 46. Асимптоты гиперболы	64
§ 47. Сопряженные гиперболы	65
§ 48. Парабола	66
§ 49. Построение параболы по данному параметру p	67
§ 50. Парабола как график уравнения $y = ax^2 + bx + c$	67
§ 51. Директрисы эллипса и гиперболы	70
§ 52. Общее определение эллипса, гиперболы и параболы	71
§ 53. Конические сечения	74
§ 54. Диаметры конического сечения	75
§ 55. Диаметры эллипса	76
§ 56. Диаметры гиперболы	77
§ 57. Диаметры параболы	79
§ 58. Линии второго порядка	80
§ 59. Запись общего уравнения второй степени	81
§ 60. Упрощение уравнения второй степени; общие замечания	82
§ 61. Предварительное преобразование уравнения второй степени	82
§ 62. Завершающее преобразование уравнения второй степени	85
§ 63. О приемах, облегчающих упрощение уравнения второй степени	91
§ 64. Признак распадаения линий второго порядка	92
§ 65. Разыскание прямых, составляющих распадающуюся линию второго порядка	93
§ 66. Инварианты уравнения второй степени	96
§ 67. Три типа линий второго порядка	98
§ 68. Центральные и нецентральные линии второго порядка	101
§ 69. Разыскание центра центральной линии второго порядка	102
§ 70. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка	103
§ 71. Равносторонняя гипербола как график уравнения $y = \frac{h}{x}$	105
§ 72. Равносторонняя гипербола как график уравнения $y = \frac{mx + n}{px + q}$	106
§ 73. Полярные координаты	108
§ 74. Связь между полярными координатами и прямоугольными	110
§ 75. Архимедова спираль	113
§ 76. Полярное уравнение прямой	114
§ 77. Полярное уравнение конического сечения	114

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 78. Понятие о векторах и скалярах	116
§ 79. Вектор в геометрии	116
§ 80. Векторная алгебра	117
§ 81. Коллинеарные векторы	117
§ 82. Нуль-вектор	118
§ 83. Равенство векторов	118
§ 84. Приведение векторов к общему началу	119
§ 85. Противоположные векторы	119
§ 86. Сложение векторов	119
§ 87. Сумма нескольких векторов	121
§ 88. Вычитание векторов	122
§ 89. Умножение и деление вектора на число	123
§ 90. Взаимная связь коллинеарных векторов (деление вектора на вектор)	124

§ 91. Проекция точки на ось	124
§ 92. Проекция вектора на ось	125
§ 93. Основные теоремы о проекциях вектора	127
§ 94. Прямоугольная система координат в пространстве	129
§ 95. Координаты точки	130
§ 96. Координаты вектора	131
§ 97. Выражения вектора через компоненты и через координаты	132
§ 98. Действия над векторами, заданными своими координатами	132
§ 99. Выражение вектора через радиусы-векторы его начала и конца	133
§ 100. Длина вектора. Расстояние между двумя точками	133
§ 101. Угол между осью координат и вектором	134
§ 102. Признак коллинеарности (параллельности) векторов	135
§ 103. Деление отрезка в данном отношении	135
§ 104. Скалярное произведение двух векторов	136
§ 104а. Физический смысл скалярного произведения	137
§ 105. Свойства скалярного произведения	138
§ 106. Скалярные произведения основных векторов	139
§ 107. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей	140
§ 108. Условие перпендикулярности векторов	141
§ 109. Угол между векторами	141
§ 110. Правая и левая системы трех векторов	142
§ 111. Векторное произведение двух векторов	143
§ 112. Свойства векторного произведения	145
§ 113. Векторные произведения основных векторов	146
§ 114. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей	147
§ 115. Компланарные векторы	149
§ 116. Смешанное произведение	149
§ 117. Свойства смешанного произведения	150
§ 118. Определитель третьего порядка	151
§ 119. Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей	154
§ 120. Признак компланарности в координатной форме	154
§ 121. Объем параллелепипеда	155
§ 122. Двойное векторное произведение	156
§ 123. Уравнение плоскости	156
§ 124. Особые случаи положения плоскости относительно системы координат	157
§ 125. Условие параллельности плоскостей	158
§ 126. Условие перпендикулярности плоскостей	159
§ 127. Угол между двумя плоскостями	159
§ 128. Плоскость, проходящая через данную точку параллельно данной плоскости	160
§ 129. Плоскость, проходящая через три точки	160
§ 130. Отрезки на осях	161
§ 131. Уравнение плоскости в отрезках	161
§ 132. Плоскость, проходящая через две точки перпендикулярно к данной плоскости	162
§ 133. Плоскость, проходящая через данную точку перпендикулярно к двум плоскостям	163
§ 134. Точка пересечения трех плоскостей	163
§ 135. Взаимное расположение плоскости и пары точек	165
§ 136. Расстояние от точки до плоскости	165
§ 137. Полярные параметры плоскости	166
§ 138. Нормальное уравнение плоскости	167
§ 139. Приведение уравнения плоскости к нормальному виду	168
§ 140. Уравнения прямой в пространстве	170
§ 141. Условие, при котором два уравнения первой степени представляют прямую	171

§ 142.	Пересечение прямой с плоскостью	172
§ 143.	Направляющий вектор	174
§ 144.	Углы между прямой и осями координат	175
§ 145.	Угол между двумя прямыми	175
§ 146.	Угол между прямой и плоскостью	176
§ 147.	Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости	177
§ 148.	Пучок плоскостей	177
§ 149.	Проекция прямой на координатные плоскости	179
§ 150.	Симметричные уравнения прямой	180
§ 151.	Приведение уравнений прямой к симметричному виду	182
§ 152.	Параметрические уравнения прямой	183
§ 153.	Пересечение плоскости с прямой, заданной параметрически	184
§ 154.	Уравнения прямой, проходящей через две данные точки	185
§ 155.	Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной прямой	185
§ 156.	Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно к данной плоскости	185
§ 157.	Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и данную прямую	185
§ 158.	Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум данным прямым	187
§ 159.	Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и параллельной другой данной прямой	187
§ 160.	Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной к данной плоскости	188
§ 161.	Уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую	188
§ 162.	Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую	190
§ 163.	Условие, при котором две прямые пересекаются или лежат в одной плоскости	191
§ 164.	Уравнения общего перпендикуляра к двум данным прямым	192
§ 165.	Кратчайшее расстояние между двумя прямыми	194
§ 165а.	Правые и левые пары прямых	195
§ 166.	Преобразование координат	197
§ 167.	Уравнение поверхности	198
§ 168.	Цилиндрические поверхности, у которых образующие параллельны одной из осей координат	198
§ 169.	Уравнения линии	200
§ 170.	Проекция линии на координатную плоскость	201
§ 171.	Алгебраические поверхности и их порядок	203
§ 172.	Сфера	204
§ 173.	Эллипсоид	204
§ 174.	Однополостный гиперболоид	208
§ 175.	Двуполостный гиперболоид	210
§ 176.	Конус второго порядка	211
§ 177.	Эллиптический параболоид	213
§ 178.	Гиперболический параболоид	214
§ 179.	Перечень поверхностей второго порядка	216
§ 180.	Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка	219
§ 181.	Поверхности вращения	220
§ 182.	Определители второго и третьего порядка	221
§ 183.	Определители высших порядков	224
§ 184.	Свойства определителей	226
§ 185.	Практический прием вычисления определителей	229
§ 186.	Применение определителей к исследованию и решению системы уравнений	231
§ 187.	Два уравнения с двумя неизвестными	232
§ 188.	Два уравнения с тремя неизвестными	233

§ 189. Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными	235
§ 190. Три уравнения с тремя неизвестными	237
§ 190а. Система n уравнений с n неизвестными	240

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.

§ 191. Вводные замечания	243
§ 192. Рациональные числа	244
§ 193. Действительные (вещественные) числа	244
§ 194. Числовая ось	246
§ 195. Переменные и постоянные величины	246
§ 196. Функция	247
§ 197. Способы задания функции	249
§ 198. Область определения функции	251
§ 199. Промежуток	253
§ 200. Классификация функций	254
§ 201. Основные элементарные функции	255
§ 202. Обозначение функции	256
§ 203. Предел последовательности	257
§ 204. Предел функции	259
§ 205. Определение предела функции	260
§ 206. Предел постоянной величины	261
§ 207. Бесконечно малая величина	261
§ 208. Бесконечно большая величина	262
§ 209. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами	263
§ 210. Ограниченные величины	263
§ 211. Расширение понятия предела	264
§ 212. Основные свойства бесконечно малых величин	265
§ 213. Основные теоремы о пределах	266
§ 214. Число e	268
§ 215. Предел $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$	269
§ 216. Эквивалентные бесконечно малые величины	269
§ 217. Сравнение бесконечно малых величин	271
§ 217а. Приращение переменной величины	273
§ 218. Непрерывность функции в точке	273
§ 219. Свойства функций, непрерывных в точке	274
§ 219а. Односторонний предел; скачок функции	275
§ 220. Непрерывность функции на замкнутом промежутке	276
§ 221. Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке	276

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

§ 222. Вводные замечания	279
§ 223. Скорость	280
§ 224. Определение производной функции	281
§ 225. Касательная	282
§ 225. Производные некоторых простейших функций	284
§ 227. Свойства производной	285
§ 228. Дифференциал	285
§ 229. Механическое истолкование дифференциала	287
§ 230. Геометрическое истолкование дифференциала	287
§ 231. Дифференцируемые функции	288
§ 232. Дифференциалы некоторых простейших функций	290
§ 233. Свойства дифференциала	291
§ 234. Инвариантность выражения $f'(x) dx$	291
§ 235. Выражение производной через дифференциалы	292

236.	Функция от функции (сложная функция)	293
237.	Дифференциал сложной функции	293
238.	Производная сложной функции	294
239.	Дифференцирование произведения	295
240.	Дифференцирование частного (дроби)	296
241.	Обратная функция	297
242.	Натуральные логарифмы	298
243.	Дифференцирование логарифмической функции	300
244.	Логарифмическое дифференцирование	301
245.	Дифференцирование показательной функции	302
246.	Дифференцирование тригонометрических функций	303
247.	Дифференцирование обратных тригонометрических функций	304
247а.	Некоторые поучительные примеры	305
248.	Дифференциал в приближенных вычислениях	307
249.	Применение дифференциала к оценке погрешности формул	309
250.	Дифференцирование неявных функций	311
251.	Параметрическое задание линии	313
252.	Параметрическое задание функции	315
253.	Циклоида	316
254.	Уравнение касательной к плоской линии	318
254а.	Касательные к кривым второго порядка	319
255.	Уравнение нормали	320
256.	Производные высших порядков	321
257.	Механический смысл второй производной	322
258.	Дифференциалы высших порядков	322
259.	Выражение высших производных через дифференциалы	325
260.	Высшие производные от функций, заданных параметрически	326
261.	Высшие производные неявных функций	326
262.	Правило Лейбница	328
263.	Теорема Ролля	329
264.	Теорема Лагранжа о среднем значении	330
265.	Формула конечных приращений	333
266.	Обобщенная теорема о среднем значении (Коши)	334
267.	Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$	336
268.	Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$	339
269.	Неопределенные выражения других видов	340
270.	Исторические сведения о формуле Тейлора	342
271.	Формула Тейлора	346
272.	Применение формулы Тейлора к вычислению значений функции	348
273.	Возрастание и убывание функции	356
274.	Признаки возрастания и убывания функции в точке	357
274а.	Признаки возрастания и убывания функции в промежулке	358
275.	Максимум и минимум	359
276.	Необходимое условие максимума и минимума	360
277.	Первое достаточное условие максимума и минимума	361
278.	Правило разыскания максимумов и минимумов	362
279.	Второе достаточное условие максимума и минимума	365
280.	Разыскание наибольших и наименьших значений функции	368
281.	Выпуклость плоских кривых; точка перегиба	374
282.	Сторона вогнутости	375
283.	Правило для разыскания точек перегиба	376
284.	Асимптоты	377
285.	Разыскание асимптот, параллельных координатным осям	378

§ 286.	Разыскание асимптот, не параллельных оси ординат	380
§ 287.	Приемы построения графиков	383
§ 288.	Решение уравнений. Общие замечания	386
§ 289.	Решение уравнений. Способ хорд	388
§ 290.	Решение уравнений. Способ касательных	390
§ 291.	Комбинированный метод хорд и касательных	392

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

§ 292.	Вводные замечания	395
§ 293.	Первообразная функция	397
§ 294.	Неопределенный интеграл	398
§ 295.	Геометрическое истолкование интегрирования	400
§ 296.	Вычисление постоянной интегрирования по начальным данным	403
§ 297.	Свойства неопределенного интеграла	404
§ 298.	Таблица интегралов	405
§ 299.	Непосредственное интегрирование	407
§ 300.	Способ подстановки (интегрирование через вспомогательную переменную)	408
§ 301.	Интегрирование по частям	412
§ 302.	Интегрирование некоторых тригонометрических выражений	415
§ 303.	Тригонометрические подстановки	418
§ 304.	Рациональные функции	420
§ 304а.	Исключение целой части	420
§ 305.	О приемах интегрирования рациональных дробей	421
§ 306.	Интегрирование простейших рациональных дробей	422
§ 307.	Интегрирование рациональных функций (общий метод)	426
§ 308.	О разложении многочлена на множители	433
§ 309.	Об интегрируемости в элементарных функциях	434
§ 310.	Некоторые интегралы, зависящие от радикалов	435
§ 311.	Интеграл от биномиального дифференциала	436
§ 312.	Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$	438
§ 313.	Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$	440
§ 314.	Определенный интеграл	441
§ 315.	Свойства определенного интеграла	445
§ 316.	Геометрическое истолкование определенного интеграла	447
§ 317.	Механическое истолкование определенного интеграла	448
§ 318.	Оценка определенного интеграла	450
§ 318а.	Неравенства Буяковского	451
§ 319.	Теорема о среднем интегрального исчисления	451
§ 320.	Определенный интеграл как функция верхнего предела	453
§ 321.	Дифференциал интеграла	455
§ 322.	Интеграл дифференциала. Формула Ньютона—Лейбница	457
§ 323.	Вычисление определенного интеграла с помощью неопределенного	459
§ 324.	Определенное интегрирование по частям	461
§ 325.	Способ подстановки в определенном интеграле	462
§ 326.	О несобственных интегралах	466
§ 327.	Интегралы с бесконечными пределами	467
§ 328.	Интеграл от функции, имеющей разрыв	472
§ 329.	О приближенном вычислении интеграла	475
§ 330.	Формулы прямоугольников	478
§ 331.	Формула трапеций	480
§ 332.	Формула Симпсона (параболических трапеций)	481
§ 333.	Площади фигур, отнесенных к прямоугольным координатам	483
§ 334.	Схема применения определенного интеграла	485
§ 335.	Площади фигур, отнесенных к полярным координатам	487

§ 336.	Объем тела по поперечным сечениям	489
§ 337.	Объем тела вращения	490
§ 338.	Длина дуги плоской линии	491
§ 339.	Дифференциал дуги	493
§ 340.	Длина дуги и ее дифференциал в полярных координатах	494
§ 341.	Площадь поверхности вращения	496

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЛИНИЯХ.

§ 342.	Кривизна	498
§ 343.	Центр, радиус и круг кривизны плоской линии	499
§ 344.	Формулы для кривизны, радиуса и центра кривизны плоской линии	500
§ 345.	Эволюта плоской линии	504
§ 346.	Свойства эволюты плоской линии	505
§ 347.	Развертка (эвольвента) плоской линии	506
§ 348.	Параметрическое задание пространственной линии	507
§ 349.	Винтовая линия	509
§ 350.	Длина дуги пространственной линии	510
§ 351.	Касательная к пространственной линии	511
§ 352.	Нормальная плоскость	513
§ 353.	Вектор-функция скалярного аргумента	514
§ 354.	Предел вектор-функции	515
§ 355.	Производная вектор-функции	516
§ 356.	Дифференциал вектор-функции	517
§ 357.	Свойства производной и дифференциала вектор-функции	518
§ 358.	Соприкасающаяся плоскость	520
§ 359.	Главная нормаль. Сопутствующий трехгранник	522
§ 360.	Взаимное расположение линии и плоскости	523
§ 361.	Основные векторы сопутствующего трехгранника	524
§ 362.	Центр, ось и радиус кривизны пространственной линии	525
§ 363.	Формулы для кривизны, радиуса и центра кривизны пространственной линии	526
§ 364.	О знаке кривизны	528
§ 365.	Кручение	529

РЯДЫ.

§ 366.	Вводные замечания	532
§ 367.	Определение ряда	532
§ 368.	Сходящиеся и расходящиеся ряды	533
§ 369.	Необходимое условие сходимости ряда	535
§ 370.	Остаток ряда	537
§ 371.	Простейшие действия над рядами	539
§ 372.	Положительные ряды	540
§ 373.	Сравнение положительных рядов	541
§ 374.	Признак Даламбера для положительного ряда	543
§ 375.	Интегральный признак сходимости	545
§ 376.	Знакопеременный ряд. Признак Лейбница	547
§ 377.	Абсолютная и условная сходимость	548
§ 378.	Признак Даламбера для произвольного ряда	550
§ 379.	Перестановка членов ряда	550
§ 380.	Группировка членов ряда	551
§ 381.	Умножение рядов	553
§ 382.	Деление рядов	556
§ 383.	Функциональный ряд	557
§ 384.	Область сходимости функционального ряда	558
§ 385.	О равномерной и неравномерной сходимости	560
§ 386.	Определение равномерной и неравномерной сходимости	562

§ 387.	Геометрическое истолкование равномерной и неравномерной сходимости	563
§ 388.	Признак равномерной сходимости; правильные ряды	564
§ 389.	Непрерывность суммы ряда	565
§ 390.	Интегрирование рядов	566
§ 391.	Дифференцирование рядов	570
§ 392.	Степенной ряд	571
§ 393.	Промежутки и радиус сходимости степенного ряда	572
§ 394.	Разыскание радиуса сходимости	573
§ 395.	Область сходимости ряда, расположенного по степеням $x - x_0$	575
§ 396.	Теорема Абеля	576
§ 397.	Действия со степенными рядами	576
§ 398.	Дифференцирование и интегрирование степенного ряда	579
§ 399.	Ряд Тейлора	581
§ 400.	Разложение функции в степенной ряд	582
§ 401.	Разложение элементарных функций в степенные ряды	585
§ 402.	Применение рядов к вычислению интегралов	589
§ 403.	Гиперболические функции	591
§ 404.	Обратные гиперболические функции	594
§ 405.	Происхождение наименований гиперболических функций	596
§ 406.	О комплексных числах	597
§ 407.	Комплексная функция действительного аргумента	598
§ 408.	Производная комплексной функции	600
§ 409.	Возведение положительного числа в комплексную степень	601
§ 410.	Формула Эйлера	602
§ 411.	Тригонометрический ряд	603
§ 412.	Исторические сведения о тригонометрических рядах	604
§ 413.	Ортогональность системы функций $\cos nx, \sin nx$	605
§ 414.	Формулы Эйлера—Фурье	607
§ 415.	Ряд Фурье	609
§ 416.	Ряд Фурье для непрерывной функции	610
§ 417.	Ряд Фурье для четной и нечетной функции	614
§ 418.	Ряд Фурье для разрывной функции	618

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ.

§ 419.	Функция двух аргументов	622
§ 420.	Функция трех и большего числа аргументов	623
§ 421.	Способы задания функций нескольких аргументов	624
§ 422.	Предел функции нескольких аргументов	627
§ 423.	О порядке малости функций нескольких аргументов	628
§ 424.	Непрерывность функции нескольких аргументов	630
§ 425.	Частные производные	631
§ 426.	Геометрическое истолкование частных производных для случая двух аргументов	632
§ 427.	Полное и частное приращение	632
§ 428.	Частный дифференциал	633
§ 429.	О выражении частной производной через дифференциал	634
§ 430.	Полный дифференциал	635
§ 431.	Геометрическое истолкование полного дифференциала (случай двух аргументов)	636
§ 432.	Инвариантность выражения $f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$ полного дифференциала	637
§ 433.	Техника дифференцирования	638
§ 434.	Дифференцируемые функции	639
§ 435.	Касательная плоскость и нормаль к поверхности	640

§ 436.	Уравнение касательной плоскости	641
§ 437.	Уравнения нормали	642
§ 438.	Дифференцирование сложной функции	643
§ 439.	Замена прямоугольных координат полярными	644
§ 440.	Формулы для производных сложной функции	644
§ 441.	Полная производная	645
§ 442.	Дифференцирование неявной функции нескольких переменных	646
§ 443.	Частные производные высших порядков	649
§ 444.	Полные дифференциалы высших порядков	651
§ 445.	Техника повторного дифференцирования	653
§ 446.	Условное обозначение дифференциалов	653
§ 447.	Формула Тейлора для функции нескольких аргументов	654
§ 448.	Экстремум (максимум и минимум) функции нескольких аргументов	656
§ 449.	Правило разыскания экстремума	657
§ 450.	Достаточные условия экстремума (случай двух аргументов)	659
§ 451.	Двойной интеграл	660
§ 452.	Геометрическое истолкование двойного интеграла	661
§ 453.	Свойства двойного интеграла	662
§ 454.	Оценка двойного интеграла	663
§ 455.	Вычисление двойного интеграла (простейший случай)	663
§ 456.	Вычисление двойного интеграла (общий случай)	667
§ 457.	Функция точки	670
§ 458.	Выражение двойного интеграла через полярные координаты	671
§ 459.	Площадь куска поверхности	675
§ 460.	Тройной интеграл	677
§ 461.	Вычисление тройного интеграла (простейший случай)	678
§ 462.	Вычисление тройного интеграла (общий случай)	679
§ 463.	Цилиндрические координаты	681
§ 464.	Выражение тройного интеграла через цилиндрические координаты	681
§ 465.	Сферические координаты	682
§ 466.	Выражение тройного интеграла через сферические координаты	682
§ 467.	Схема применения двойного и тройного интеграла	684
§ 468.	Момент инерции	685
§ 469.	Выражение некоторых физических и геометрических величин через двойные интегралы	687
§ 470.	Выражение некоторых физических и геометрических величин через тройные интегралы	689
§ 471.	Криволинейный интеграл	691
§ 472.	Механический смысл криволинейного интеграла	693
§ 473.	Вычисление криволинейного интеграла	693
§ 474.	Формула Грина	695
§ 475.	Условие, при котором криволинейный интеграл не зависит от пути	696
§ 476.	Другая форма условия предыдущего параграфа	698

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

§ 477.	Основные понятия	701
§ 478.	Уравнение первого порядка	703
§ 479.	Геометрическое истолкование уравнения первого порядка	703
§ 480.	Изоклины	706
§ 481.	Частное и общее решение уравнения первого порядка	707
§ 482.	Уравнения с разделенными переменными	708
§ 483.	Разделение переменных. Особое решение	710

§ 484.	Уравнение в полных дифференциалах	711
§ 484а.	Интегрирующий множитель	712
§ 485.	Однородное уравнение	713
§ 486.	Линейное уравнение первого порядка	715
§ 487.	Уравнение Клеро	718
§ 488.	Огибающая	719
§ 489.	Об интегрируемости дифференциальных уравнений	721
§ 490.	Приближенное интегрирование уравнений первого порядка по методу Эйлера	721
§ 491.	Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов	723
§ 492.	О составлении дифференциальных уравнений	725
§ 493.	Уравнение второго порядка	729
§ 494.	Уравнение n -го порядка	731
§ 495.	Случай понижения порядка	732
§ 496.	Линейное уравнение второго порядка	733
§ 497.	Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами	735
§ 498.	Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части	736
§ 498а.	Связь между случаями 1 и 3 § 498	739
§ 499.	Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью	740
§ 500.	Линейные уравнения любого порядка	746
§ 501.	Метод вариации постоянных	748
§ 502.	Системы дифференциальных уравнений. Линейные системы	749

ТАБЛИЦЫ.

I.	Натуральные логарифмы	751
II.	Таблица для перехода от натуральных логарифмов к десятичным	755
III.	Таблица для перехода от десятичных логарифмов к натуральным	755
IV.	Показательная функция e^x	756
V.	Таблица неопределенных интегралов	758
	Алфавитный указатель	769