

Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ I

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника для механико-математических факультетов
государственных университетов и учебного пособия
для физико-математических факультетов
педагогических институтов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА • 1964

517.2
Ф 65
УДК 517.0(075.8)

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Григорий Михайлович Фихтенгольц
Основы математического анализа, том I
М., 1964 г., 440 стр. с илл.

Редактор *Л. И. Головина*

Техн. редактор *А. А. Лукьянов*

Корректор *Л. А. Любович*

Сдано в набор 6/III 1964 г.
Физ. печ. л. 27,5.

Подписано к печати 4/VIII 1964 г.
Усл. печ. л. 27,5. Уч.-изд. л. 29,1.
Т-09175. Цена 98 коп. Заказ № 928.

Бумага 60×90^{1/16}.
Тираж 75 000 экз.

Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Главполиграфпрома»
Государственного комитета Совета Министров СССР по печати, Гатчинская, 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
-----------------------	----

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Множество вещественных чисел и его упорядочение	
1. Предварительные замечания	15
2. Определение иррационального числа	16
3. Упорядочение множества вещественных чисел	19
4. Представление вещественного числа бесконечной десятичной дробью	20
5. Непрерывность множества вещественных чисел	23
6. Границы числовых множеств	24
§ 2. Арифметические действия над вещественными числами	
7. Определение и свойства суммы вещественных чисел	27
8. Симметричные числа. Абсолютная величина	28
9. Определение и свойства произведения вещественных чисел	29
§ 3. Дальнейшие свойства и приложения вещественных чисел	
10. Существование корня. Степень с рациональным показателем	31
11. Степень с любым вещественным показателем	32
12. Логарифмы	34
13. Измерение отрезков	35

ГЛАВА ВТОРАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Понятие функции	
14. Переменная величина	37
15. Область изменения переменной величины	38
16. Функциональная зависимость между переменными. Примеры	39
17. Определение понятия функции	40
18. Аналитический способ задания функции	42
19. График функции	44
20. Функции натурального аргумента	46
21. Исторические замечания	48
§ 2. Важнейшие классы функций	
22. Элементарные функции	49
23. Понятие обратной функции	52
24. Обратные тригонометрические функции	54
25. Суперпозиция функций. Заключительные замечания	57

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. Предел функции

26. Исторические замечания	59
27. Числовая последовательность	59
28. Определение предела последовательности	61
29. Бесконечно малые величины	62
30. Примеры	63
31. Бесконечно большие величины	66
32. Определение предела функции	68
33. Другое определение предела функции	69
34. Примеры	71
35. Односторонние пределы	76

§ 2. Теоремы о пределах

36. Свойства функции от натурального аргумента, имеющей конечный предел	78
37. Распространение на случай функции от произвольной переменной	80
38. Предельный переход в равенстве и неравенстве	81
39. Леммы о бесконечно малых	82
40. Арифметические операции над переменными	84
41. Неопределенные выражения	85
42. Распространение на случай функции от произвольной переменной	88
43. Примеры	89

§ 3. Монотонная функция

44. Предел монотонной функции от натурального аргумента	92
45. Примеры	94
46. Лемма о вложенных промежутках	96
47. Предел монотонной функции в общем случае	97

§ 4. Число e

48. Число e как предел последовательности	98
49. Приближенное вычисление числа e	100
50. Основная формула для числа e . Натуральные логарифмы	102

§ 5. Принцип сходимости

51. Частичные последовательности	104
52. Условие существования конечного предела для функции от натурального аргумента	106
53. Условие существования конечного предела для функции любого аргумента	108

§ 6. Классификация бесконечно малых и бесконечно больших величин

54. Сравнение бесконечно малых	110
55. Шкала бесконечно малых	111
56. Эквивалентные бесконечно малые	112
57. Выделение главной части	114
58. Задачи	114
59. Классификация бесконечно больших	116

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Непрерывность (и разрывы) функции

60. Определение непрерывности функции в точке	117
61. Условие непрерывности монотонной функции	119
62. Арифметические операции над непрерывными функциями	120
63. Непрерывность элементарных функций	121
64. Суперпозиция непрерывных функций	123
65. Вычисление некоторых пределов	123
66. Степенно-показательные выражения	125
67. Классификация разрывов. Примеры	126

§ 2. Свойства непрерывных функций

68. Теорема об обращении функции в нуль	128
69. Применение к решению уравнений	130
70. Теорема о промежуточном значении	130
71. Существование обратной функции	132
72. Теорема об ограниченности функции	133
73. Наибольшее и наименьшее значения функции	134
74. Понятие равномерной непрерывности	136
75. Теорема о равномерной непрерывности	138

ГЛАВА ПЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная и ее вычисление

76. Задача о вычислении скорости движущейся точки	140
77. Задача о проведении касательной к кривой	142
78. Определение производной	143
79. Примеры вычисления производных	147
80. Производная обратной функции	149
81. Сводка формул для производных	151
82. Формула для приращения функции	152
83. Простейшие правила вычисления производных	153
84. Производная сложной функции	155
85. Примеры	156
86. Односторонние производные	158
87. Бесконечные производные	159
88. Дальнейшие примеры особых случаев	160

§ 2. Дифференциал

89. Определение дифференциала	161
90. Связь между дифференцируемостью и существованием производной	162
91. Основные формулы и правила дифференцирования	164
92. Инвариантность формы дифференциала	165
93. Дифференциалы как источник приближенных формул	166
94. Применение дифференциалов при оценке погрешностей	167

§ 3. Производные и дифференциалы высших порядков

95. Определение производных высших порядков	168
96. Общие формулы для производных любого порядка	170

97. Формула Лейбница	172
98. Дифференциалы высших порядков	174
99. Нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков	175

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Теоремы о средних значениях

100. Теорема Ферма	177
101. Теорема Ролля	178
102. Теорема о конечных приращениях	180
103. Предел производной	182
104. Обобщенная теорема о конечных приращениях	182

§ 2. Формула Тейлора

105. Формула Тейлора для многочлена	183
106. Разложение произвольной функции	185
107. Другая форма дополнительного члена	188
108. Приложение полученных формул к элементарным функциям	190
109. Приближенные формулы. Примеры	192

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Изучение хода изменения функции

110. Условие постоянства функции	195
111. Условие монотонности функции	196
112. Максимумы и минимумы; необходимые условия	197
113. Первое правило	199
114. Второе правило	201
115. Построение графика функции	202
116. Примеры	203
117. Использование высших производных	206

§ 2. Наибольшее и наименьшее значения функции

118. Разыскание наибольших и наименьших значений	207
119. Задачи	208

§ 3. Раскрытие неопределенностей

120. Неопределенности вида $\frac{0}{0}$	210
121. Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$	212
122. Другие виды неопределенностей	214

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные понятия

123. Функциональная зависимость между переменными. Примеры	217
124. Функции двух переменных и области их определения	218
125. Арифметическое m -мерное пространство	220

126. Примеры областей в m -мерном пространстве	223
127. Общее определение открытой и замкнутой областей	225
128. Функции m переменных	227
129. Предел функции нескольких переменных	228
130. Примеры	231
131. Повторные пределы	232

§ 2. Непрерывные функции

132. Непрерывность и разрывы функций нескольких переменных . .	234
133. Операции над непрерывными функциями	236
134. Теорема об обращении функции в нуль	237
135. Лемма Больцано — Вейерштрасса	239
136. Теорема об ограниченности функции	240
137. Равномерная непрерывность	240

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

138. Частные производные	243
139. Полное приращение функции	245
140. Производные от сложных функций	248
141. Примеры	249
142. Полный дифференциал	251
143. Инвариантность формы (первого) дифференциала	253
144. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях	255
145. Однородные функции	256

§ 2. Производные и дифференциалы высших порядков

146. Производные высших порядков	259
147. Теоремы о смешанных производных	260
148. Дифференциалы высших порядков	263
149. Дифференциалы сложных функций	265
150. Формула Тейлора	266

§ 3. Экстремумы, наибольшие и наименьшие значения

151. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые условия	268
152. Исследование стационарных точек (случай двух переменных) . .	270
153. Наибольшее и наименьшее значения функции. Примеры	274
154. Задачи	276

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ)

§ 1. Неопределенный интеграл и простейшие приемы его вычисления

155. Понятие первообразной функции (и неопределенного интеграла)	279
156. Интеграл и задача об определении площади	282

157. Таблица основных интегралов	284
158. Простейшие правила интегрирования	286
159. Примеры	287
160. Интегрирование путем замены переменной	289
161. Примеры	291
162. Интегрирование по частям	293
163. Примеры	294
§ 2. Интегрирование рациональных выражений	
164. Постановка задачи интегрирования в конечном виде	296
165. Простые дроби и их интегрирование	297
166. Интегрирование правильных дробей	299
167. Метод Остроградского для выделения рациональной части интеграла	301
§ 3. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы	
168. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$	304
169. Интегрирование биномиальных дифференциалов	306
170. Интегрирование выражений вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$. Подстановки Эйлера	308
§ 4. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические и показательную функции	
171. Интегрирование дифференциалов $R(\sin x, \cos x) dx$	312
172. Обзор других случаев	315
§ 5. Эллиптические интегралы	
173. Определения	316
174. Приведение к канонической форме	317
ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ	
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	
§ 1. Определение и условия существования определенного интеграла	
175. Другой подход к задаче о площади	320
176. Определение	322
177. Суммы Дарбу	323
178. Условие существования интеграла	326
179. Классы интегрируемых функций	327
§ 2. Свойства определенных интегралов	
180. Интеграл по ориентированному промежутку	329
181. Свойства, выражаемые равенствами	331
182. Свойства, выражаемые неравенствами	332
183. Определенный интеграл как функция верхнего предела	336
§ 3. Вычисление и преобразование определенных интегралов	
184. Вычисление с помощью интегральных сумм	338
185. Основная формула интегрального исчисления	340

186. Формула замены переменной в определенном интеграле	341
187. Интегрирование по частям в определенном интеграле	343
188. Формула Валлиса	344
§ 4. Приближенное вычисление интегралов	
189. Формула трапеций	345
190. Параболическая формула	347
191. Дополнительные члены приближенных формул	349
192. Пример	352

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Площади и объемы

193. Определение понятия площади. Квадрируемые области	354
194. Аддитивность площади	356
195. Площадь как предел	357
196. Выражение площади интегралом	357
197. Определение понятия объема, его свойства	361
198. Выражение объема интегралом	363

§ 2. Длина дуги

199. Определение понятия длины дуги	370
200. Леммы	372
201. Выражение длины дуги интегралом	372
202. Переменная дуга, ее дифференциал	376
203. Длина дуги пространственной кривой	378

§ 3. Вычисление механических и физических величин

204. Схема применения определенного интеграла	379
205. Площадь поверхности вращения	382
206. Нахождение статических моментов и центра тяжести кривой	384
207. Нахождение статических моментов и центра тяжести плоской фигуры	386
208. Механическая работа	389

ГЛАВА ТРИНАДЦАТАЯ

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Касательная и касательная плоскость

209. Аналитическое представление кривых на плоскости	391
210. Касательная к плоской кривой	393
211. Положительное направление касательной	397
212. Случай пространственной кривой	399
213. Касательная плоскость к поверхности	401

§ 2. Кривизна плоской кривой

214. Направление вогнутости, точки перегиба	403
215. Понятие кривизны	405
216. Круг кривизны и радиус кривизны	408

ГЛАВА ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК ВОЗНИКНОВЕНИЯ
ОСНОВНЫХ ИДЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**§ 1. Предыстория дифференциального и интегрального исчисления**

217. XVII век и анализ бесконечно малых	411
218. Метод неделимых	411
219. Дальнейшее развитие учения о неделимых	414
220. Нахождение наибольших и наименьших, проведение касательных	416
221. Проведение касательных с помощью кинематических соображений	418
222. Взаимная обратность задач проведения касательной и квадратуры	419
223. Обзор предыдущего	420

§ 2. Исаак Ньютон (1642—1727)

224. Исчисление флюксий	421
225. Исчисление, обратное исчислению флюксий; квадратуры	423
226. Ньютоновы «Начала» и зарождение теории пределов	426
227. Вопросы обоснования у Ньютона	427

§ 3. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716)

228. Начальные шаги в создании нового исчисления	427
229. Первая печатная работа по дифференциальному исчислению	428
230. Первая печатная работа по интегральному исчислению	430
231. Дальнейшие работы Лейбница. Создание школы	431
232. Вопросы обоснования у Лейбница	432
233. Послесловие	433

Алфавитный указатель	434
---------------------------------------	------------