

ФЕДЕРАЛЬНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ПРОГРАММА  
«ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОДДЕРЖКА ИНТЕГРАЦИИ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ»

---

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

---

С. П. КУЗНЕЦОВ

# ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС

## КУРС ЛЕКЦИЙ

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по физическим специальностям*



Москва  
Физматлит, 2001

ББК 22.193  
К 47  
УДК 519.6

*Издание осуществлено при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки»*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *В. С. Анищенко*

доктор физико-математических наук, профессор *А. С. Дмитриев*

**КУЗНЕЦОВ С. П. Динамический хаос (курс лекций).**—М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.—296 с.—ISBN 5-94052-044-8.

Излагаются основы представлений о динамическом хаосе — феномене, который активно исследуется в последнее время и встречается в нелинейных системах различной природы — механических, электрических, оптических, химических, биологических. Обсуждаются как простые модельные системы, в которых присутствие хаоса допускает полное обоснование, так и примеры реалистичных физических систем с хаотической динамикой (модель Лоренца, нелинейные осцилляторы, электронные схемы). Разъясняются основные концепции науки о динамическом хаосе, в том числе подкова Смейла, гомоклиническая структура, показатели Ляпунова, фрактальная природа странных аттракторов, фрактальная размерность, обсуждается проблема определения характеристик хаоса на основе обработки наблюдаемых реализаций. Специальное внимание уделено вопросу о сценариях перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, перемежаемость, квазипериодические режимы, и методу ренормгруппы, представляющему собой общий теоретический подход к исследованию динамики на пороге возникновения хаоса.

Книга может использоваться как учебное пособие для студентов-физиков, специализирующихся в области нелинейной динамики, теории колебаний, в радиофизике, будет полезна также для аспирантов и докторантов соответствующих специальностей и для исследователей, работающих в области нелинейной динамики и ее приложений.

ISBN 5-94052-044-8

© Центр «Интеграция», 2001  
© С. П. Кузнецов, 2001

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	6
<b>Лекция 1. Динамические системы и хаос.</b> <b>Историческое введение . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. Механика . . . . .	8
1.2. Статистическая физика . . . . .	9
1.3. Теория колебаний, радиофизика и электроника . . . . .	11
1.4. Гидродинамика . . . . .	13
1.5. Дискретные отображения . . . . .	15
1.6. Математика . . . . .	17
1.7. Прикладной хаос . . . . .	18
<b>Лекция 2. Хаос в простых моделях динамических систем . . . . .</b>	<b>21</b>
2.1. Одномерные отображения . . . . .	25
2.2. Двумерные отображения, сохраняющие площадь . . . . .	32
2.3. Странные хаотические аттракторы . . . . .	37
<b>Лекция 3. Система Лоренца . . . . .</b>	<b>43</b>
3.1. Задача о конвекции в подогреваемом снизу слое . . . . .	44
3.2. Конвекция в замкнутой петле и водяное колесо . . . . .	49
3.3. Уравнения динамики одномодового лазера . . . . .	52
3.4. Диссипативный осциллятор с инерционной нелинейностью . . . . .	54
<b>Лекция 4. Динамика системы Лоренца . . . . .</b>	<b>56</b>
4.1. Результаты численного решения уравнений Лоренца . . . . .	56
4.2. Аналитическое исследование уравнений Лоренца . . . . .	59
4.3. Бифуркации в модели Лоренца . . . . .	63
<b>Лекция 5. Хаос в реалистичных моделях физических систем: дифференциальные уравнения и рекуррентные отображения . . . . .</b>	<b>67</b>
5.1. Модели с дискретным временем . . . . .	68
5.2. Искусственно сконструированные дифференциальные уравнения . . . . .	76
5.3. Нелинейные осцилляторы под периодическим внешним воздействием . . . . .	79
5.4. Автономные системы — электронные генераторы . . . . .	84
<b>Лекция 6. Сечение Пуанкаре, подкова Смейла, теорема Шильникова . . . . .</b>	<b>93</b>
6.1. Сечение Пуанкаре и отображение последования . . . . .	94
6.2. Подкова Смейла . . . . .	97
6.3. Теорема Шильникова о петле сепаратрисы седлофокуса . . . . .	102
<b>Лекция 7. Гомоклиническая структура . . . . .</b>	<b>107</b>
7.1. Устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки и их пересечение . . . . .	107

7.2. Связь гомоклинической структуры и подковы Смейла . . . . .	109
7.3. Критерий Мельникова . . . . .	111
<b>Лекция 8. Функция распределения, инвариантная мера, эргодичность и перемешивание . . . . .</b>	<b>117</b>
8.1. Функция распределения и инвариантная мера . . . . .	119
8.2. Эргодичность и перемешивание . . . . .	123
8.3. Одномерные отображения: инвариантные распределения и уравнение Фробениуса–Перрона . . . . .	128
8.4. Системы с непрерывным временем, уравнение для функции распределения и портреты странных аттракторов . . . . .	131
<b>Лекция 9. Устойчивость и неустойчивость. Ляпуновские показатели . . . . .</b>	<b>135</b>
9.1. Устойчивость по Лагранжу . . . . .	136
9.2. Устойчивость по Пуассону и возвраты Пуанкаре . . . . .	136
9.3. Устойчивость по Ляпунову . . . . .	138
<b>Лекция 10. Ляпуновские показатели для отображений. Методы численной оценки ляпуновских показателей . . . . .</b>	<b>148</b>
10.1. Обобщение ляпуновских показателей на рекуррентные отображения . . . . .	148
10.2. Примеры аналитического расчета ляпуновских показателей . . . . .	150
10.3. Алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя . . . . .	153
10.4. Ортогонализация Грама–Шмидта и вычисление спектра ляпуновских показателей . . . . .	155
10.5. Примеры численного расчета ляпуновских показателей . . . . .	157
10.6. Зависимость ляпуновского показателя от параметров . . . . .	160
10.7. Двухпараметрический анализ и карты ляпуновских показателей . . . . .	161
<b>Лекция 11. Геометрия странных аттракторов и фрактальная размерность . . . . .</b>	<b>164</b>
11.1. Фракталы . . . . .	166
11.2. Фрактальная размерность — емкость . . . . .	170
11.3. Размерность Хаусдорфа и ее связь с емкостью . . . . .	171
11.4. Фрактальная размерность двухмасштабного канторова множества и странного аттрактора в обобщенном отображении пекаря . . . . .	173
<b>Лекция 12. Обобщенные размерности и мультифрактальный формализм . . . . .</b>	<b>176</b>
12.1. Информационная размерность . . . . .	176
12.2. Корреляционная размерность и алгоритм Грассбергера–Прокаччи . . . . .	178
12.3. Спектр обобщенных размерностей Реньи . . . . .	181
12.4. Усовершенствованное определение и спектр размерностей аттрактора обобщенного отображения пекаря . . . . .	182
12.5. Сквейлинг-спектр . . . . .	185
12.6. Ляпуновская размерность и формула Каплана–Йорке . . . . .	188

<b>Лекция 13. Обработка реализаций: реконструкция аттрактора по наблюдаемой, проблема вложения, вычисление характеристик хаотической динамики</b> . . . . .	191
13.1. Реконструкция фазового пространства методом запаздывания (delay-time reconstruction) . . . . .	192
13.2. Оценка корреляционной размерности по наблюдаемой . . . . .	193
13.3. О технических проблемах, возникающих при вычислении размерности. Оценка Экмана–Рюэля . . . . .	195
13.4. Теорема о вложении . . . . .	198
13.5. Вычисление ляпуновских показателей по реализации . . . . .	200
13.6. Идея реконструкции уравнений динамической системы по наблюдаемой реализации . . . . .	201
<b>Лекция 14. Сценарии перехода к хаосу. Общая дискуссия</b> . . . . .	205
<b>Лекция 15. Сценарий Фейгенбаума: ренормгруппа, универсальность, скейлинг</b> . . . . .	218
15.1. Переход к хаосу в логистическом отображении . . . . .	218
15.2. Уравнение РГ . . . . .	222
15.3. Линеаризованное уравнение РГ . . . . .	225
15.4. Скейлинг . . . . .	229
<b>Лекция 16. Критический аттрактор Фейгенбаума</b> . . . . .	233
16.1. Критический аттрактор, как фрактал . . . . .	233
16.2. О последовательности посещения точек на критическом аттракторе . . . . .	237
16.3. Символическая динамика в критической точке . . . . .	238
16.4. Сигма-функция . . . . .	240
16.5. Спектр Фурье . . . . .	241
16.6. О переходе к хаосу через удвоения периода в реальных системах и моделях в виде дифференциальных уравнений . . . . .	244
<b>Лекция 17. Переमेжаемость</b> . . . . .	249
17.1. Перемежаемость типа I: примеры . . . . .	249
17.2. Перемежаемость типа I: теория . . . . .	255
17.3. Ренормгрупповой подход к анализу перемежаемости . . . . .	259
<b>Лекция 18. Квазипериодическая динамика и переход к хаосу в отображении окружности</b> . . . . .	262
18.1. Отображение окружности . . . . .	262
18.2. Динамика отображения окружности . . . . .	263
18.3. Цепные дроби . . . . .	268
18.4. Уравнение РГ: общий случай . . . . .	269
18.5. РГ анализ критической точки, отвечающей золотому среднему . . . . .	271
<b>Лекция 19. Критическая динамика и свойства скейлинга в случае числа вращения, заданного золотым средним</b> . . . . .	275
19.1. Критический аттрактор GM . . . . .	276
19.2. Скейлинг на критической линии . . . . .	280
19.3. Скейлинг языков Арнольда на плоскости параметров . . . . .	282
<b>Список литературы</b> . . . . .	286