

ФЕДЕРАЛЬНАЯ ЦЕЛЕВАЯ ПРОГРАММА
«ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПОДДЕРЖКА ИНТЕГРАЦИИ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ»

СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

С. П. КУЗНЕЦОВ

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС

КУРС ЛЕКЦИЙ

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по физическим специальностям*



Москва
Физматлит, 2001

ББК 22.193
К 47
УДК 519.6

Издание осуществлено при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки»

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *В. С. Анищенко*

доктор физико-математических наук, профессор *А. С. Дмитриев*

КУЗНЕЦОВ С. П. Динамический хаос (курс лекций).—М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.—296 с.—ISBN 5-94052-044-8.

Излагаются основы представлений о динамическом хаосе — феномене, который активно исследуется в последнее время и встречается в нелинейных системах различной природы — механических, электрических, оптических, химических, биологических. Обсуждаются как простые модельные системы, в которых присутствие хаоса допускает полное обоснование, так и примеры реалистичных физических систем с хаотической динамикой (модель Лоренца, нелинейные осцилляторы, электронные схемы). Разъясняются основные концепции науки о динамическом хаосе, в том числе подкова Смейла, гомоклиническая структура, показатели Ляпунова, фрактальная природа странных аттракторов, фрактальная размерность, обсуждается проблема определения характеристик хаоса на основе обработки наблюдаемых реализаций. Специальное внимание уделено вопросу о сценариях перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, перемежаемость, квазипериодические режимы, и методу ренормгруппы, представляющему собой общий теоретический подход к исследованию динамики на пороге возникновения хаоса.

Книга может использоваться как учебное пособие для студентов-физиков, специализирующихся в области нелинейной динамики, теории колебаний, в радиофизике, будет полезна также для аспирантов и докторантов соответствующих специальностей и для исследователей, работающих в области нелинейной динамики и ее приложений.

ISBN 5-94052-044-8

© Центр «Интеграция», 2001
© С. П. Кузнецов, 2001

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	6
Лекция 1. Динамические системы и хаос. Историческое введение	7
1.1. Механика	8
1.2. Статистическая физика	9
1.3. Теория колебаний, радиофизика и электроника	11
1.4. Гидродинамика	13
1.5. Дискретные отображения	15
1.6. Математика	17
1.7. Прикладной хаос	18
Лекция 2. Хаос в простых моделях динамических систем	21
2.1. Одномерные отображения	25
2.2. Двумерные отображения, сохраняющие площадь	32
2.3. Странные хаотические аттракторы	37
Лекция 3. Система Лоренца	43
3.1. Задача о конвекции в подогреваемом снизу слое	44
3.2. Конвекция в замкнутой петле и водяное колесо	49
3.3. Уравнения динамики одномодового лазера	52
3.4. Диссипативный осциллятор с инерционной нелинейностью	54
Лекция 4. Динамика системы Лоренца	56
4.1. Результаты численного решения уравнений Лоренца	56
4.2. Аналитическое исследование уравнений Лоренца	59
4.3. Бифуркации в модели Лоренца	63
Лекция 5. Хаос в реалистичных моделях физических систем: дифференциальные уравнения и рекуррентные отображения	67
5.1. Модели с дискретным временем	68
5.2. Искусственно сконструированные дифференциальные уравнения	76
5.3. Нелинейные осцилляторы под периодическим внешним воздействием	79
5.4. Автономные системы — электронные генераторы	84
Лекция 6. Сечение Пуанкаре, подкова Смейла, теорема Шильникова	93
6.1. Сечение Пуанкаре и отображение последования	94
6.2. Подкова Смейла	97
6.3. Теорема Шильникова о петле сепаратрисы седлофокуса	102
Лекция 7. Гомоклиническая структура	107
7.1. Устойчивое и неустойчивое многообразия неподвижной точки и их пересечение	107

7.2. Связь гомоклинической структуры и подковы Смейла	109
7.3. Критерий Мельникова	111
Лекция 8. Функция распределения, инвариантная мера, эргодичность и перемешивание	117
8.1. Функция распределения и инвариантная мера	119
8.2. Эргодичность и перемешивание	123
8.3. Одномерные отображения: инвариантные распределения и уравнение Фробениуса–Перрона	128
8.4. Системы с непрерывным временем, уравнение для функции распределения и портреты странных аттракторов	131
Лекция 9. Устойчивость и неустойчивость. Ляпуновские показатели	135
9.1. Устойчивость по Лагранжу	136
9.2. Устойчивость по Пуассону и возвраты Пуанкаре	136
9.3. Устойчивость по Ляпунову	138
Лекция 10. Ляпуновские показатели для отображений. Методы численной оценки ляпуновских показателей	148
10.1. Обобщение ляпуновских показателей на рекуррентные отображения	148
10.2. Примеры аналитического расчета ляпуновских показателей	150
10.3. Алгоритм вычисления старшего ляпуновского показателя	153
10.4. Ортогонализация Грама–Шмидта и вычисление спектра ляпуновских показателей	155
10.5. Примеры численного расчета ляпуновских показателей	157
10.6. Зависимость ляпуновского показателя от параметров	160
10.7. Двухпараметрический анализ и карты ляпуновских показателей	161
Лекция 11. Геометрия странных аттракторов и фрактальная размерность	164
11.1. Фракталы	166
11.2. Фрактальная размерность — емкость	170
11.3. Размерность Хаусдорфа и ее связь с емкостью	171
11.4. Фрактальная размерность двухмасштабного канторова множества и странного аттрактора в обобщенном отображении пекаря	173
Лекция 12. Обобщенные размерности и мультифрактальный формализм	176
12.1. Информационная размерность	176
12.2. Корреляционная размерность и алгоритм Грассбергера–Прокаччи	178
12.3. Спектр обобщенных размерностей Реньи	181
12.4. Усовершенствованное определение и спектр размерностей аттрактора обобщенного отображения пекаря	182
12.5. Сквейлинг-спектр	185
12.6. Ляпуновская размерность и формула Каплана–Йорке	188

Лекция 13. Обработка реализаций: реконструкция аттрактора по наблюдаемой, проблема вложения, вычисление характеристик хаотической динамики	191
13.1. Реконструкция фазового пространства методом запаздывания (delay-time reconstruction)	192
13.2. Оценка корреляционной размерности по наблюдаемой	193
13.3. О технических проблемах, возникающих при вычислении размерности. Оценка Экмана–Рюзля	195
13.4. Теорема о вложении	198
13.5. Вычисление ляпуновских показателей по реализации	200
13.6. Идея реконструкции уравнений динамической системы по наблюдаемой реализации	201
Лекция 14. Сценарии перехода к хаосу. Общая дискуссия	205
Лекция 15. Сценарий Фейгенбаума: ренормгруппа, универсальность, скейлинг	218
15.1. Переход к хаосу в логистическом отображении	218
15.2. Уравнение РГ	222
15.3. Линеаризованное уравнение РГ	225
15.4. Скейлинг	229
Лекция 16. Критический аттрактор Фейгенбаума	233
16.1. Критический аттрактор, как фрактал	233
16.2. О последовательности посещения точек на критическом аттракторе	237
16.3. Символическая динамика в критической точке	238
16.4. Сигма-функция	240
16.5. Спектр Фурье	241
16.6. О переходе к хаосу через удвоения периода в реальных системах и моделях в виде дифференциальных уравнений	244
Лекция 17. Переमेжаемость	249
17.1. Перемежаемость типа I: примеры	249
17.2. Перемежаемость типа I: теория	255
17.3. Ренормгрупповой подход к анализу перемежаемости	259
Лекция 18. Квазипериодическая динамика и переход к хаосу в отображении окружности	262
18.1. Отображение окружности	262
18.2. Динамика отображения окружности	263
18.3. Цепные дроби	268
18.4. Уравнение РГ: общий случай	269
18.5. РГ анализ критической точки, отвечающей золотому среднему	271
Лекция 19. Критическая динамика и свойства скейлинга в случае числа вращения, заданного золотым средним	275
19.1. Критический аттрактор GM	276
19.2. Скейлинг на критической линии	280
19.3. Скейлинг языков Арнольда на плоскости параметров	282
Список литературы	286