

КЛАССИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ

МАТЕМАТИКА

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ СЕРИИ

Председатель совета
член-корреспондент РАН **Л. Д. Кудрявцев**

Члены совета:

Андреева М. Н.

Геворкян П. С. (заместитель председателя)

Демидов С. С.

Ильин В. А.

Калина И. И.

Каштанов В. А.

Кириллов А. И.

Лазарев В. А. (заместитель председателя)

Никольский С. М.

Поспелов А. С.

Розанова С. А. (заместитель председателя)

Садовничий В. А.

Скубачевский А. Л.

Степанов В. Д.

Тихомиров В. М.

Филиппов В. М.

Ширяев А. Н.

Ягола А. Г.

КЛАССИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ
МАТЕМАТИКА

И. Г. Петровский

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ
ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 517.91/4
ББК 22.161.1
П 30



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 08-01-07069

Петровский И. Г. **Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 208 с. — ISBN 978-5-9221-1144-7.

Книга представляет собой учебник по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений. Тщательно продуманное изложение дало возможность в небольшом объеме вместить обширный материал. Более детально и строго, чем в других руководствах, рассмотрены уравнения простых типов. Подробно изложены общие теоремы о разрешимости уравнений и систем уравнений с непрерывными правыми частями. Теория линейных уравнений сопровождается оригинальным изложением канонической формы систем. Книга включает в себя дополнение, содержащее теорию линейных и нелинейных уравнений с частными производными I-го порядка. Большое количество задач значительно расширяет содержание книги.

Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебного пособия для физико-математических факультетов университетов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию	9
Предисловие к третьему изданию	9

Часть I.

Одно дифференциальное уравнение 1-го порядка с одной неизвестной функцией

Глава I. Общие понятия	10
§ 1. Определения, примеры	10
§ 2. Геометрическая интерпретация. Обобщение задачи	12
Глава II. Простейшие дифференциальные уравнения . .	18
§ 3. Уравнения вида $\frac{dy}{dx} = f(x)$	18
§ 4. Уравнения вида $\frac{dy}{dx} = f(y)$	21
§ 5. Уравнения с разделяющимися переменными	22
§ 6. Однородные уравнения	25
§ 7. Линейные уравнения	27
§ 8. Уравнения в полных дифференциалах	29
§ 9. Интегрирующий множитель.	31
Глава III. Общая теория	37
§ 10. Ломаные Эйлера	37
§ 11. Теорема Арцеля.	39

§ 12. Доказательство существования решения дифференциального уравнения (1) методом Пеано	42
§ 13. Теорема Осгуда о единственности	47
§ 14. Дополнение о ломаных Эйлера	52
§ 15. Метод последовательных приближений	52
§ 16. Принцип сжатых отображений	59
§ 17. Геометрическая интерпретация принципа сжатых отображений	63
§ 18. Теорема Коши о дифференциальном уравнении $dy/dx = f(x, y)$ с голоморфной правой частью	65
§ 19. О степени гладкости решений дифференциальных уравнений	69
§ 20. Зависимость решения от начальных данных	70
§ 21. Лемма Адамара	74
§ 22. Теорема о зависимости решения от параметров	75
§ 23. Особые точки	79
§ 24. Особые линии	85
§ 25. О поведении интегральных кривых в целом	86
§ 26. Уравнения, неразрешенные относительно производной	90
§ 27. Огибающие	99

Часть II.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Глава IV. Общая теория	103
§ 28. Сведение любой системы к системе уравнений 1-го порядка	103
§ 29. Геометрическая интерпретация. Определения	104
§ 30. Формулировка основных теорем	107
§ 31. Принцип сжатых отображений для систем операторных уравнений	113
§ 32. Приложение принципа сжатых отображений к системе дифференциальных уравнений	117

Глава V. Общая теория линейных систем	122
§ 33. Определения. Следствия из общей теории систем дифференциальных уравнений	122
§ 34. Основные теоремы для однородных систем 1-го порядка	125
§ 35. Теорема Лиувилля	130
§ 36. Составление однородной линейной системы дифференциальных уравнений вида (97) по данной фундаментальной системе ее решений	131
§ 37. Следствия для дифференциального уравнения n -го порядка	132
§ 38. Понижение порядка линейного однородного дифференциального уравнения	135
§ 39. О нулях решений линейных однородных уравнений 2-го порядка	137
§ 40. Система неоднородных линейных уравнений 1-го порядка	140
§ 41. Следствие для линейного неоднородного уравнения n -го порядка	142
Глава VI. Линейные системы с постоянными коэффициентами	144
§ 42. Предварительные замечания	144
§ 43. Теорема о приведении к каноническому виду	146
§ 44. Инварианты линейного преобразования	152
§ 45. Элементарные делители	154
§ 46. Отыскание фундаментальной системы решений для однородной системы уравнений	158
§ 47. Применение к однородному дифференциальному уравнению n -го порядка.	162
§ 48. Разыскание частных решений неоднородных систем.	164
§ 49. Приведение к каноническому виду уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}$	167
§ 50. Устойчивость решений	169
§ 51. Один физический пример	175
Дополнение	180
Уравнения с частными производными 1-го порядка от одной неизвестной функции.	180
§ 52. Почти линейные уравнения	180

§ 53. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений	187
§ 54. Квазилинейные уравнения	191
§ 55. Нелинейные уравнения	194
§ 56. Уравнение Пфаффа	204