

**И. М. Гельфанд
С. Г. Гиндикин
М. И. Граев**

**Избранные
задачи
интегральной
геометрии**

ДОБРОСВЕТ
Издательство «КДУ»
Москва
2007

УДК 514.765.7
ББК 22.151
Г27

Гельфанд И. М.

Г27 Избранные задачи интегральной геометрии / И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, М. И. Граев. — М. : Добросвет, КДУ, 2007. — 236 с.

ISBN 978-5-98227-172-3

В книге, на примере нескольких задач, изложены основные идеи и методы интегральной геометрии — нового направления в современной математике, переплетающегося с теорией представления групп, теорией однородных пространств, дифференциальной геометрией, теорией дифференциальных и интегральных уравнений и другими разделами. Книга предназначена для студентов-математиков и широкого круга специалистов.

УДК 514.765.7
ББК 22.151

ISBN 978-5-98227-172-3

© «Добросвет», 2007

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Предисловие | 9 |
| Глава I | |
| Преобразование Радона | 14 |
| § 1. Преобразование Радона на плоскости | 14 |
| 1.1. Преобразование Радона на евклидовой плоскости | 14 |
| 1.2. Формула обращения | 15 |
| 1.3. Замечания | 18 |
| 1.4. Преобразование Радона на аффинной плоскости | 19 |
| 1.5. Связь с преобразованием Фурье и другой вывод формулы обращения | 20 |
| § 2. Преобразование Радона в трехмерном пространстве | 23 |
| 2.1. Преобразование Радона в евклидовом пространстве | 23 |
| 2.2. Преобразование Радона в аффинном пространстве | 26 |
| 2.3. Преобразование Радона для пространств произвольной размерности | 28 |
| § 3. Волновое уравнение и принцип Гюйгенса | 29 |
| 3.1. Двумерный случай | 29 |
| 3.2. Трехмерный случай | 31 |
| § 4. Условия Кавальери и теоремы Пэли—Винера для преобразова- ния Радона | 32 |
| 4.1. Условия Кавальери для быстро убывающих функций | 32 |
| 4.2. Теорема Пэли—Винера для пространства $S(\mathbb{R}^2)$ | 34 |
| 4.3. Теорема Пэли—Винера для пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций | 35 |
| 4.4. Обращение преобразования Радона функции $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ при помощи моментов | 37 |
| 4.5. Восстановление неизвестных направлений по заданным значениям $\mathcal{R}f$ | 37 |
| § 5. Формула Пуассона для преобразования Радона и дискретное преобразование Радона | 39 |
| 5.1. Формула Пуассона для преобразования Радона на пло- скости | 39 |

| | |
|---|----|
| 5.2. Дискретное преобразование Радона; связь с рядами Фурье | 42 |
| 5.3. Задача интегральной геометрии на торе | 43 |
| § 6. Преобразование Минковского—Функа | 44 |
| § 7. Преобразование Радона дифференциальных форм | 47 |
| 7.1. Преобразование Радона 1-форм на плоскости | 47 |
| 7.2. Преобразование Радона 2-форм на плоскости | 49 |
| 7.3. Преобразование Радона 2-форм в трехмерном пространстве | 52 |
| 7.4. Преобразование Радона 3-форм в трехмерном пространстве | 53 |
| § 8. Преобразование Радона для проективной плоскости и проективного пространства | 55 |
| 8.1. Пространства \mathbb{P}^3 и $(\mathbb{P}^3)'$ | 55 |
| 8.2. Преобразование Радона для \mathbb{P}^3 | 55 |
| 8.3. Связь с аффинным преобразованием Радона для \mathbb{R}^3 и преобразованием Минковского—Функа для трехмерной сферы | 57 |
| 8.4. Формула обращения для преобразования Радона в \mathbb{P}^3 | 58 |
| 8.5. О формулах обращения для аффинного преобразования Радона в \mathbb{R}^3 и преобразования Минковского—Функа для S^3 | 60 |
| 8.6. Описание образа преобразования Радона для \mathbb{P}^3 | 61 |
| 8.7. Преобразование Радона для проективной плоскости \mathbb{P}^2 | 62 |
| § 9. Преобразование Радона в комплексном аффинном пространстве | 65 |
| 9.1. Определение преобразования Радона | 66 |
| 9.2. Связь с преобразованием Фурье | 66 |
| 9.3. Формула обращения для преобразования Радона | 67 |
| 9.4. Случай $n = 2$ | 67 |

Глава II

| | |
|---|----|
| Лучевое преобразование | 69 |
| § 1. Лучевое преобразование в вещественном аффинном пространстве | 71 |
| 1.1. Лучевое преобразование в \mathbb{R}^3 | 71 |
| 1.2. Лучевое преобразование и гипергеометрическая функция Гаусса | 73 |
| 1.3. Теорема об образе оператора \mathcal{I} | 74 |
| 1.4. Пространство $S(H')$ | 76 |
| 1.5. Описание образа $S(\mathbb{R}^3)$ в пространстве $S(H')$ | 78 |
| 1.6. Доказательство теоремы 1.1 об образе лучевого преобразования | 79 |
| 1.7. Формулы обращения | 80 |

| | |
|--|-----|
| 1.8. Аналогии оператора κ | 82 |
| §2. Лучевое преобразование дифференциальных форм в \mathbb{R}^3 | 84 |
| 2.1. Определение лучевого преобразования дифференциальных форм | 84 |
| 2.2. Лучевое преобразование 3-форм на \mathbb{R}^3 | 85 |
| 2.3. Лучевое преобразование 2-форм на \mathbb{R}^3 | 88 |
| 2.4. Лучевое преобразование 1-форм на \mathbb{R}^3 | 91 |
| §3. Лучевое преобразование в трехмерном вещественном проективном пространстве | 92 |
| 3.1. Многообразии прямых в \mathbb{P}^3 | 92 |
| 3.2. Лучевое преобразование в \mathbb{P}^3 | 94 |
| 3.3. Связь с лучевым преобразованием в аффинном пространстве | 95 |
| 3.4. Описание образа лучевого преобразования | 96 |
| 3.5. Другой способ определения лучевого преобразования ... | 98 |
| 3.6. Доказательство теоремы об образе лучевого преобразования | 100 |
| 3.7. Лучевое преобразование как сплетающий оператор | 101 |
| §4. Лучевое преобразование в комплексном аффинном пространстве | 103 |
| 4.1. Лучевое преобразование в \mathbb{C}^3 | 103 |
| 4.2. Дифференциальная форма $\kappa\varphi$ и теорема об образе лучевого преобразования | 105 |
| 4.3. Формула обращения | 105 |
| 4.4. Аналогии оператора κ | 107 |
| §5. Задачи интегральной геометрии для комплексов прямых в \mathbb{C}^3 | 109 |
| 5.1. Задача интегральной геометрии для комплекса прямых в \mathbb{C}^3 , пересекающих кривую | 109 |
| 5.2. Определение допустимых комплексов прямых в \mathbb{C}^3 | 111 |
| 5.3. Необходимые и достаточные условия допустимости комплекса K | 112 |
| 5.4. Геометрическая структура допустимых комплексов | 114 |
| 5.5. Описание допустимых комплексов | 116 |

Глава III

| | |
|---|------------|
| Интегральная геометрия и гармонический анализ на плоскости и в пространстве Лобачевского | 119 |
| §1. Элементы планиметрии Лобачевского | 120 |
| 1.1. Модели плоскости Лобачевского | 120 |
| 1.2. Орициклы | 122 |
| 1.3. Геодезические | 123 |
| §2. Орициклическое преобразование | 124 |

| | |
|---|------|
| 2.1. Определение оператора \mathcal{R}^h | 124 |
| 2.2. Формула обращения | 125 |
| 2.3. Соотношения Асгейрссона | 127 |
| 2.4. Соотношение симметрии | 128 |
| 2.5. Формула обращения для орициклического преобразования в другой модели плоскости Лобачевского | 128 |
| § 3. Аналог преобразования Фурье на плоскости Лобачевского и его связь с орициклическим преобразованием | 129 |
| 3.1. Преобразование Фурье на \mathbb{R}^2 | 2129 |
| 3.2. Преобразование Фурье на плоскости Лобачевского | 131 |
| 3.3. Связь с орициклическим преобразованием и формула обра- щения | 132 |
| 3.4. Соотношение симметрии | 134 |
| 3.5. Формула Планшереля | 135 |
| § 4. Связь с теорией представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$ | 136 |
| § 5. Интегральное преобразование, связанное с прямыми (геодези- ческими) на плоскости Лобачевского \mathcal{L}^2 | 139 |
| 5.1. Определение и формула обращения в модели Пуанкаре .. | 139 |
| 5.2. Связь с преобразованием Радона на проективной плоскости | 142 |
| § 6. Орисферическое преобразование в трехмерном пространстве Лобачевского \mathcal{L}^3 | 143 |
| 6.1. Модели пространства Лобачевского | 143 |
| 6.2. Орисферы | 145 |
| 6.3. Орисферическое преобразование | 146 |
| 6.4. Формула обращения | 146 |
| 6.5. Соотношение симметрии | 149 |
| 6.6. Формула обращения для орисферического преобразования в другой модели пространства Лобачевского | 149 |
| 6.7. Интегральное преобразование, связанное с вполне геодези- ческими поверхностями в \mathcal{L}^3 | 150 |
| Добавление. Орисферическое преобразование для простран- ства Лобачевского произвольной размерности .. | 151 |
| § 7. Аналог преобразования Фурье в пространстве Лобачевского и его связь с орисферическим преобразованием | 152 |
| 7.1. Определение преобразования Фурье | 152 |
| 7.2. Формула обращения | 153 |
| 7.3. Соотношение симметрии и формула Планшереля | 154 |
| § 8. Связь с теорией представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ | 155 |
| § 9. Волновое уравнение для плоскости и пространства Лобачев- ского и принцип Гюйгенса | 157 |
| 9.1. Двумерный случай | 157 |
| 9.2. Трехмерный случай | 160 |

Глава IV

| | |
|---|-----|
| Интегральная геометрия и гармонический анализ на группе $G = SL(2, \mathbb{C})$ | 162 |
| §1. Геометрия на группе G | 162 |
| 1.1. Группа G как однородное пространство | 162 |
| 1.2. Плоские сечения гиперboloида G | 163 |
| 1.3. Многообразии орисфер | 165 |
| 1.4. Вложение многообразия орисфер H в проективное пространство | 169 |
| 1.5. Комплекс прямых в \mathbb{C}^3 , ассоциированный с многообразием орисфер | 169 |
| 1.6. Многообразии параболоидов | 170 |
| §2. Интегральная геометрия на группе $G = SL(2, \mathbb{C})$ | 173 |
| 2.1. Интегральные преобразования, связанные с пространством H орисфер и комплексом прямых K | 173 |
| 2.2. Соотношения симметрии для орисферического преобразования | 175 |
| 2.3. Формула обращения для интегрального преобразования \mathcal{R}_0 , связанного с комплексом прямых в \mathbb{C}^3 | 176 |
| 2.4. Формула обращения для орисферического преобразования | 178 |
| 2.5. Формула обращения для орисферического преобразования в пространстве Лобачевского \mathcal{L}^3 | 180 |
| 2.6. Интегральное преобразование, связанное с параболоидами на G | 181 |
| Добавление. Замечание об орисферическом преобразовании на группе $SL(2, \mathbb{R})$ | 184 |
| §3. Гармонический анализ на группе $G = SL(2, \mathbb{C})$ | 185 |
| 3.1. Операторы Лапласа—Бельтрами на группе G | 185 |
| 3.2. Орисферические функции на G | 186 |
| 3.3. Преобразование Фурье на G | 189 |
| 3.4. Связь преобразования Фурье на G с орисферическим преобразованием | 191 |
| 3.5. Соотношение симметрии для преобразования Фурье | 192 |
| 3.6. Формула обращения для преобразования Фурье | 192 |
| 3.7. Аналог формулы Планшереля | 194 |
| 3.8. Связь преобразования Фурье на G с представлениями группы $G \times G$ | 195 |
| 3.9. Связь с представлениями группы G | 198 |
| §4. Другая версия преобразования Фурье на $G = SL(2, \mathbb{C})$ | 200 |
| 4.1. Функции $\Psi_\chi(g; \xi, \zeta)$ | 201 |
| 4.2. Преобразование Фурье на G | 202 |

| | |
|--|------------|
| 4.3. Связь между двумя вариантами преобразования Фурье | 203 |
| 4.4. Соотношение симметрии | 204 |
| 4.5. Формула обращения и формула Планшереля для преобразования Фурье \mathcal{F} | 204 |
| 4.6. Связь с теорией представлений | 205 |
| Глава V | |
| Интегральная геометрия на квадриках | 207 |
| § 1. Интегральное преобразование, связанное с гиперплоскими сечениями двухполостного гиперболоида в \mathbb{R}^{n+1} | 208 |
| 1.1. Определение | 108 |
| 1.2. Допустимые подмногообразия в многообразии гиперплоских сечений \mathcal{L}^n | 209 |
| 1.3. Оператор κ_x | 212 |
| 1.4. Локальный и нелокальный операторы κ | 215 |
| 1.5. Формула обращения | 216 |
| 1.6. Примеры | 218 |
| § 2. Интегральное преобразование, связанное со сферами в евклидовом пространстве E^n | 222 |
| 2.1. Определение | 223 |
| 2.2. Оператор κ_x | 224 |
| 2.3. Формула обращения | 226 |
| 2.4. Примеры | 227 |
| Исправления и дополнения к 1-й главе | 231 |
| Предметный указатель | 234 |