

**В. Ф. Кравченко**

**ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ  
АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ  
И  
НЕКОТОРЫМ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯМ**

**Издательство «Радиотехника»**



**Москва 2003**

УДК 517.551:519.65:621.396.677.494:621.391

К78

ББК 32.16+22.19;32.95.32.845.32.85.32.811

Рецензенты:

акад. РАН Ю. В. Гуляев;

акад. РАН и НАН Украины Ю. А. Митропольский;

чл.-корр. РАН В. И. Пустовойт

**К 78 Кравченко В. Ф.** Лекции по теории атомарных функций и их приложениям. Монография. — М.: Радиотехника, 2003. — 511 с.

ISBN 5-93108-019-8

Излагаются основные вопросы теории атомарных функций — одного из активно развивающихся научных направлений в областях как прикладной математики, так и радиофизических приложений. Рассматривается применение АФ к задачам цифровой обработки сигналов, цифровой электронной, анализа и синтеза антенн, операционного исчисления, томографии и красивым задачам математической физики.

*Для специалистов, занимающихся системными вопросами радиотехники и электроники, задачами математического моделирования физических процессов в различных структурах. Может быть полезна студентам и аспирантам ВУЗов, специализирующихся по прикладной вычислительной математике.*

УДК 517.551:519.65:621.396.677.494:621.391

ББК 32.16+22.19;32.95.32.845.32.85.32.811

ISBN 5-93108-019-8

© "Радиотехника"

## ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора .....	12
<b>Лекция 1 Теория атомарных функций</b>	
1.1. Введение в теорию атомарных функций .....	13
1.2. Материнская функция $ur(x)$ и её основные свойства .....	14
<b>Лекция 2 Атомарные функции <math>fur_N(x)</math></b>	
2.1. Функции $fur_N(x)$ .....	19
2.2. Свойства функции $fur_N(x)$ .....	20
<b>Лекция 3 Атомарные функции <math>h_a(x)</math></b>	
3.1. Атомарные функции $h_a(x)$ и их свойства .....	26
3.2. Интерполяция сигналов с использованием АФ $h_a(x)$ .....	29
3.3. Пример расчета атомарной функции $h_a(x)$ .....	32
<b>Лекция 4 Атомарные функции <math>\Xi_n(x)</math> и <math>g_k(x)</math></b>	
4.1. Атомарные функции $\Xi_n(x)$ .....	34
4.2. Атомарные функции $g_k(x)$ .....	35
<b>Лекция 5 Атомарные функции <math>y_r(x)</math>, <math>ur_m(x)</math> и <math>\pi_m(x)</math></b>	
5.1. Определение и основные свойства функций $y_r(x)$ .....	43
5.2. Определение и основные свойства функций $ur_m(x)$ .....	46
5.3. Моменты и значения функций $ur_m(x)$ .....	53
5.4. Атомарные функции $\pi_m(x)$ .....	56
<b>Литература к лекциям 1–5 .....</b>	<b>59</b>
<b>Лекция 6 Интерполяционные свойства атомарных функций <math>ur(x)</math>, <math>fur_N(x)</math></b>	
6.1. Интерполяционные свойства функций $ur(x)$ и $fur_N(x)$ .....	61
6.2. Интерполяционный полином и полиномиальная теория свёртки .....	62
6.3. Интерполяция атомарными функциями $fur_N(x)$ .....	67

<b>Лекция 7 Некоторые приближения атомарными функциями</b>	
7.1. Приближение атомарными функциями.....	74
7.2. Итерационный метод разложения интерполяционного алгебраического полинома по атомарным функциям.....	75
7.3. Атомарная интерполяция непериодических функций.....	81
7.4. Атомарная квазиинтерполяция.....	83
7.5. Атомарная интерполяция функций двух независимых переменных.....	83
<b>Литература к лекциям 6,7.....</b>	<b>85</b>
<b>Лекция 8 Обобщение теоремы Котельникова-Шеннона атомарными функциями</b>	
8.1. Теорема Котельникова-Шеннона (отсчетов) и ее обобщение на основе атомарных функций.....	86
8.2. Интерполяция сигналов.....	86
8.3. Аппроксимация диаграммы направленности антенны.....	90
8.4. Синтез нулей в диаграмме направленности решетки.....	94
<b>Литература к лекции 8.....</b>	<b>97</b>
<b>Лекция 9 Спектральные свойства некоторых атомарных функций</b>	
9.1. Спектральные свойства атомарных функций в задачах цифровой обработки сигналов. Новые синтезированные окна В.Ф. Кравченко.....	98
9.2. Операции свертки и корреляции.....	98
9.3. Синтезирование новых весовых функций (окон).....	103
9.4. Применение новых синтезированных окон в задачах цифровой обработки речи.....	108
<b>Литература к лекции 9.....</b>	<b>112</b>
<b>Лекция 10 Цифровая обработка сигналов на основе атомарных функций <math>up(x)</math>, <math>fup(x)</math> и <math>\Xi_n(x)</math></b>	
10.1. Атомарные функции $up(x)$ , $fup(x)$ , $\Xi_n(x)$ и их комбинации в задачах цифровой обработки сигналов.....	113
10.2. Использование операции свертки при синтезе весовых функций.....	113
10.3. Численный эксперимент.....	114
<b>Литература к лекции 10.....</b>	<b>124</b>

**Лекция 11 Новые весовые функции в цифровой обработке сигналов**

11.1. Спектральные свойства новых весовых функций в цифровой обработке сигналов .....	125
11.2. Атомарная функция $\text{fir}_M(x)$ и методы её вычисления .....	125
11.3. Новые синтезированные окна .....	126
11.4. Фильтрация сигналов новыми окнами .....	140
11.5. Временное растяжение окон Кравченко.....	146
<b>Литература к лекции 11 .....</b>	<b>148</b>

**Лекция 12 Синтез цифровых фильтров на основе атомарных функций**

12.1. Синтез цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой.....	149
12.2. Синтез цифровых фильтров с бесконечной импульсной характеристикой.....	152
12.3. Окна В.Ф.Кравченко-В.А.Рвачева в цифровой радиолокации .....	155
12.4. Использование новых типов окон при анализе электроэнцефалограмм.....	160
<b>Литература к лекции 12 .....</b>	<b>165</b>

**Лекция 13 Теория R-функций и атомарных функций в цифровой обработке сигналов**

13.1. R-функции и атомарные функции в задачах цифровой обработки многомерных сигналов .....	166
13.2. R-функции и обратная задача аналитической геометрии .	166
13.3. Атомарные функции .....	171
13.4. Атомарные функции и R-функции .....	174
<b>Литература к лекции 13 .....</b>	<b>180</b>

**Лекция 14 Синтез двумерных оконных функций (окон) на основе R-функций и атомарных функций**

14.1. Синтез двумерных оконных функций (окон) .....	181
14.2. Синтез двумерных оконных функций с каноническими опорными областями.....	191
14.3. Синтез двумерных цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой.....	198
<b>Литература к лекции 14 .....</b>	<b>200</b>

## **Лекция 15 Атомарные функции в задачах физической электроники**

15.1. Постановка задачи оптимального управления динамическим процессом .....	201
15.2. Аппроксимация управления атомарными функциями.....	203
15.3. Вспомогательный функционал I и его первая вариация ...	204
15.4. Формулы составляющих градиента целевой функции .....	205
15.5. Схема итерационного метода .....	206
15.6. Метод поиска глобального экстремума.....	206
15.7. Оптимизация по КПД ЛБВ-0 со спиральной замедляющей системой.....	210

## **Лекция 16 Минимизация нелинейных искажений в полосе частот в ЛБВ-0 с оптимизированной нерегулярной спиральной системой**

16.1. Математическая модель нерегулярной ЛБВ .....	218
16.2. Приближенный расчет дисперсии спиральной ЗС .....	220
16.3. Анализ полосовых характеристик оптимальных вариантов ЛБВ-0 .....	221
16.4. Оптимизация по КПД релятивистской ЛБВ-0 с замедляющей системой в виде гофрированного волновода с изменяющимся периодом и глубиной канавки.....	226

## **Лекция 17 Оптимизация ЛБВ-0 на гофрированном волноводе**

17.1. Оптимизация ЛБВ-0 на гофрированном волноводе с учетом высших гармонических составляющих .....	231
17.2. Оптимизированные по КПД релятивистские генераторы на гофрированном волноводе .....	234
17.3. Оптимизированные по КПД ЛБВ-0 на основной волне коаксиального гофрированного волновода .....	235
17.4. Особенности оптимизации .....	241
17.5. Анализ оптимальных вариантов ЛБВ .....	241
17.6. Варианты усилителей с регулярным гофром .....	242

## **Лекция 18 Особенности оптимизации нерегулярных ЛБВ на цепочке связанных резонаторов**

18.1. Оптимизация нерегулярных ЛБВ на цепочке связанных резонаторов мм диапазона .....	245
18.2. Результаты расчетов .....	248
18.3. Релятивистская ЛОВ с комбинированным профилем электродинамической системы.....	253
18.4. Одномерные самосогласованные уравнения ЛОВ с учетом сил взаимодействия электронов .....	253
18.5. Аппроксимация профиля электродинамической системы	255
18.6. Оптимальный вариант ЛОВ.....	256

Литература к лекциям 15–18.....	260
---------------------------------	-----

<b>Лекция 19 Анализ и синтез линейных антенн атомарными функциями</b>	
19.1. Введение .....	264
19.2. Постановка задачи и метод решения .....	265
19.3. Атомарные функции .....	266
19.4. Функции $up(x)$ , $Fup_n(x)$ , $\Xi_n(x)$ .....	267
19.5. Атомарные функции и их парциальные диаграммы .....	269
19.6. Атомарные функции и синтез линейной антенны.....	273
19.7. Численный эксперимент .....	275
19.8. Выводы .....	281
<b>Литература к лекции 19</b> .....	<b>282</b>
<b>Лекция 20 Аппроксимация заданной функции целыми функциями экспоненциального типа. Синтез антенн с безлепестковыми ДН атомарными функциями</b>	
20.1. Аппроксимация заданной функции целыми функциями экспоненциального типа .....	285
20.2. Численный эксперимент .....	288
20.3. Синтез антенн с безлепестковыми диаграммами направленности атомарными функциями .....	290
<b>Литература к лекции 20</b> .....	<b>296</b>
<b>Лекция 21 Спектральные свойства атомарной функции <math>up_m(x)</math> и их применения</b>	
21.1. Введение .....	297
21.2. Основные свойства функций $up_m(x)$ .....	397
21.3. Моменты и значения функций $up_m(x)$ .....	302
21.4. Новые весовые функции (окна) на основе семейства атомарных функций $up_m(x)$ .....	305
21.5. Двумерные весовые функции на основе семейства атомарных функций $up_m(x,y)$ .....	307
<b>Литература к лекции 21</b> .....	<b>310</b>
<b>Лекция 22 Атомарные функции в задачах синтеза неэквидистантных антенных решеток и сканирующих линейных антенн</b>	
22.1. Введение .....	311
22.2. Постановка задачи синтеза антенной решётки .....	311
22.3. Задачи приближенного синтеза .....	313
22.4. Условия существования точного решения для линейных антенных решёток .....	316
22.5. Аппроксимация функциями класса $W_\sigma$ .....	317
23.6. Синтез диаграмм направленности неэквидистантных антенных решёток атомарными функциями .....	318
<b>Литература к лекции 22</b> .....	<b>325</b>

**Лекция 23 Оптимальные диаграммы направленности  
сканирующих антенн**

23.1. Введение .....	326
23.2. Постановка задачи и метод решения .....	326
23.3. Синтез оптимальной разностной диаграммы направленности .....	329
23.4. Численный эксперимент .....	331
23.5. Оптимальное распределение поля в раскрыве сканирующей антенны .....	334
23.6. Анализ численного эксперимента .....	335
<b>Литература к лекции 23</b> .....	<b>341</b>

**Лекция 24 Атомарные функции в задачах синтеза  
плоского излучателя**

22.1. Основные соотношения .....	342
22.2. Постановка задачи и метод решения .....	344
24.3. Численный эксперимент .....	347
24.4. Выводы .....	351
<b>Литература к лекции 23</b> .....	<b>352</b>

**Лекция 25 Атомарно-фрактальные функции в задачах  
синтеза антенн**

25.1. Введение .....	353
25.2. Синтез атомарно-фрактальных диаграмм направленности	353
25.3. Выводы .....	363
<b>Литература к лекции 25</b> .....	<b>365</b>

**Лекция 26 Функция Больцано в задачах синтеза  
фрактальных антенн**

26.1. Введение .....	367
26.2. Построение функции Больцано .....	367
26.3. Фрактальная антенная решетка .....	372
26.4. Анализ результатов .....	378
26.5. Применение атомарных функций и функции Больцано при синтезе антенных решеток с фрактальными характеристиками излучения .....	378
26.6. Численный эксперимент .....	383

<b>Лекция 27 Атомарные функции и функция Больцано в задаче синтеза двумерных фрактальных антенных решеток</b>	
27.1. Введение .....	385
27.2. Семейство атомарных функций $h_a(x)$ .....	385
27.3. Конструирование самоподобной антенной решетки .....	386
27.4. Двумерная решетка .....	390
27.5. Двумерные фрактальные антенные решетки, построенных на основе функций Кравченко–Больцано .....	392
27.6. Расчет коэффициента направленного действия двумерных фрактальных антенных решеток .....	393
Литература к лекциям 26, 27 .....	398
<b>Лекция 28 Применение атомарной функции <math>up(t)</math> в задачах операционного исчисления</b>	
28.1. Введение .....	399
28.2. Теоремы операционного исчисления и атомарные функции .....	402
<b>Лекция 29 Атомарные функции и их операционное описание</b>	
29.1. $up(t)$ или материнская атомарная функция.....	412
29.2. Атомарные функции $fup_n(t)$ .....	413
29.3. Атомарные функции $\Xi_n(t)$ .....	415
29.4. Атомарные функции $sup(t)$ .....	416
29.5. Атомарные функции $g_{n,h}$ .....	417
29.6. Атомарные функции $h_a(t)$ .....	418
29.7. Атомарные функции $Fup_n(t)$ .....	419
<b>Лекция 30 Применение атомарных функций в задачах калмановской линейной фильтрации</b>	
30.1. Непрерывный фильтр Калмана .....	420
30.2. Модификация фильтра Калмана.....	429
30.3. Применение новых весовых функций к задаче повышения качества фильтрации.....	430
Литература к лекциям 28–30 .....	432

<b>Лекция 31 Функции В.Л. Рвачева в задачах вычислительной томографии</b>	
31.1. Введение .....	433
31.2. Постановка задачи вычислительной томографии. Интегральное преобразование Радона .....	433
31.3. Преобразование Радона и его свойства .....	434
31.4. Обращение преобразования Радона как некорректная задача .....	437
31.5. Приближение атомарными функциями .....	439
31.6. Атомарная периодическая интерполяция .....	445
31.7. Атомарная интерполяция непериодических функций .....	445
31.8. Атомарная квазинтерполяция .....	446
31.9. Атомарная интерполяция функций двух независимых переменных .....	446
<b>Лекция 32 Численные алгоритмы обращения преобразования Радона</b>	
32.1. Интерполяция атомарными функциями и обратная задача диагностики плазмы .....	449
32.2. Алгебраические алгоритмы реконструкции .....	453
32.3. Решение обратной задачи вычислительной томографии с помощью метода R-функций .....	455
32.4. Обратная задача аналитической геометрии .....	455
32.5. Структуры решения краевых задач .....	457
32.6. Обращение преобразования Радона с помощью R-функций .....	458
32.7. Метод фильтрованных обратных проекций и весовые окна на основе атомарных функций .....	464
32.8. Заключение .....	466
<b>Литература к лекциям 31 – 32 .....</b>	<b>467</b>
<b>Лекция 33 Применение атомарных функций для решения краевых задач математической физики</b>	
33.1. Введение .....	473
33.2. Атомарные функции .....	474
33.3. Аппроксимационные пространства и W-системы .....	482

**Лекция 34 Краевые задачи математической физики для объединений канонических областей**

34.1. Атомарные функции и краевые задачи для объединений канонических областей .....	490
34.2. Решение краевых задач для пересечения канонических областей .....	499
34.3. Атомарные функции и структурный метод решения краевых задач .....	502
34.4. Заключение .....	505
<b>Литература к лекциям 33 – 34 .....</b>	<b>506</b>